מבוא לפיזיקה מודרנית - סיכום

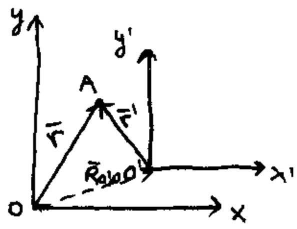
I תורת היחסות הפרטית

I הקדמה - תנועה יחסית ומערכות אינרציאליות

גם ניוטון וגם גלילאו הבינו שאי-אפשר לתאר תנועה של גוף כלשהו בצורה מוחלטת - חייבים לתאר אותה ביחס לתנועה של גוף אחר (בדרך כלל אנו מציעים לתאר אותה יחסית לראשית של מערכת צירים כלשהי). ניוטון תיאר את התנועה ביחס ל"מרחב מוחלט" כלשהו - מעין מערכת אפס שהכל מתואר ביחס אליה. גלילאו, לעומתו, טען שכל מערכת יכולה להיות ביחס למערכת אחרת, ואין אף מערכת מוחלטת.

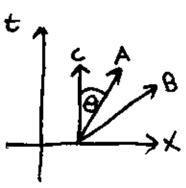
מערכות אינרציאליות - הינן מערכות אשר נעות במהירות קבועה זו ביחס לזו.
במעבר ממערכת אינרציאלית אחת לשניה נשמרים חוקי הפיזיקה - גם שימור תנע, גם שימור אנרגיה. גלילאו תיאר את המעבר בין המערכות בעזרת "טרנספורמציית גלילי":

$$\begin{cases} \bar{r} = \bar{r}' + \bar{R}_{o',o} \\ \bar{v} = \bar{v}' + \bar{V}_{o',o} \\ \bar{a} = \bar{a}' + \bar{A}_{o',o} \end{cases}$$



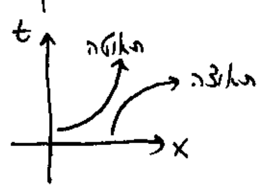
דיאגרמות זמן-מרחב

דרך נוספת לבטא את תלות התנועה בזמן ובמקום - מסתמכת על תנועה חד-מימדית:



$$\tan\theta = \frac{x}{t} = V_A$$

$$V_B > V_A > V_C = 0$$



II האור כגל

בקלאסית 2 רואים שאם פותרים את משוואות מקסוול בריק (אין מטענים או זרמים חשמליים) מקבלים משוואת גלים שאחד הפתרונות שלה הוא גל מישורי מסוג: $\omega = kc$, $f = A\cos(kx - \omega t)$.

כלומר שאור גל אלקטרומגנטי מתקדם במהירות האור: $\boxed{c = 3\times 10^8 \frac{m}{s}}$.

מה לעשות כשמתברר שהאור הוא בעצם גל אלקטרומגנטי שמקיים את אותו גל מישורי:

$$\boxed{\Psi(x,t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t\right) = A\sin(kx - \omega t)}$$

כאשר λ הוא אורך הגל, T הוא זמן המחזור ומהירות הגל היא: $\boxed{V_{wave} = \frac{\lambda}{T}}$

את הביטוי $\phi \equiv \frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t$ מגדירים כפאזה של הגל. הפרש פאזה בין שתי נקודות x_1, x_2 בזמן t כלשהו יהיה: $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2)$

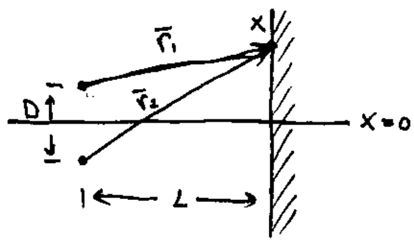
אם $(x_1 - x_2)$ פרופורציוני ל-λ אז שתי הנקודות באותה פאזה (מקבלים $\sin(n\cdot x)$ שנותן את אותה התוצאה לכל $n\in\mathbb{N}$); ואם מקבלים $n\cdot\frac{1}{2}$ - הפאזה תהיה הפוכה.

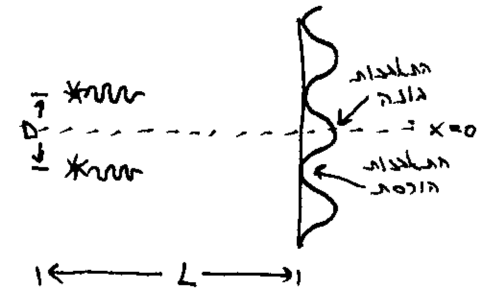
התאבכות

מקור אור קוהרנטי: מקור אור בעל אורך גל קבוע, היוצא בפאזה זהה: כל הגלים יוצאים באותה פאזה.

שני מקורות אור קוהרנטיים ייצרו תמונת התאבכות - צבעת של אור וחושך; כאשר בנקודות של התאבכות בונה עצמת האור תהיה כפולה: $\Psi(x_{בונה}, t) = \Psi_1(x_0,t)+\Psi_2(x_0,t) = 2A\cos(\phi)$.

מיקום נקודות התאבכות בונה/הורסת





הנחות עבודה:

1) $L \gg D, X$

2) התאבכות בונה: $\Delta r = n\lambda$

התאבכות הורסת: $\Delta r = (n+\frac{1}{2})\lambda$

1. $|r_2| = \sqrt{L^2 + (x+\frac{1}{2}D)^2} = L\sqrt{1+\frac{(x+\frac{1}{2}D)^2}{L^2}} \simeq L\left[1+\frac{1}{2}\frac{(x+\frac{1}{2}D)^2}{L^2}\right]$

   $|r_1| = \sqrt{L^2 + (x-\frac{1}{2}D)^2} \simeq L\left[1+\frac{1}{2}\frac{(x-\frac{1}{2}D)^2}{L^2}\right]$

2. $\Delta r = |r_2| - |r_1| = \frac{xD}{L}$

3. התאבכות בונה: $\Delta r = n\lambda$: $\boxed{x_n = \frac{n\lambda L}{D}}$

   התאבכות הורסת: $\Delta r = (n+\frac{1}{2})\lambda$: $\boxed{x_n = \frac{(n+\frac{1}{2})\lambda L}{D}}$

* קירובים: חשוב לזכור את אחד הקירובים הכי נפוצים בקורס: $\boxed{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \simeq 1+\frac{1}{2}\varepsilon}$

מהירות גל האור עבור צופים שונים

במעבר בין מערכות ייחוס אורך הגל λ לא משתנה, אבל מהירות הגל V וזמן המחזור T כן משתנים:

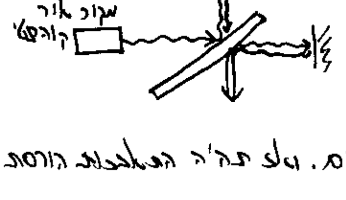
כאשר משתמשים בטרנס' גליליי $x = x' + V_0 t$ נקבל: $V' = V - V_0$

השינוי במהירות הגל: $\Rightarrow \boxed{V_{\text{גל ביחס לתווך}} = V_{\text{גל ביחס לצופה}} + V_{\text{צופה ביחס לתווך}}}$

השינוי בזמן המחזור: $\boxed{T' = \frac{T}{1-\frac{V_0}{V}}}$

ניסוי מייקלסון-מורלי

פעם, כשעוד לא היו פלאפונים, חשבו שכמו שגלי קול צריכים תווך, אז גם האור צריך לנוע בתווך כל שהו - אתר. מייקלסון ומורלי בנו ניסוי לאתר את האתר:



מראה חצי מעבירה מפצלת את קרן האור. אם יש אתר, האור יזרום יחסית אליו (כמו שספינות זורמות ביחס לזרמים בים) והקרניים יחזרו למראה בהפרשי זמנים. ואז תהיה התאבכות הורסת.

אבל במציאות לא הייתה התאבכות הורסת - הקרניים תמיד היו באותה פאזה.

בניסוי הנ"ל - אין אתר.

III התארכות הזמן

אחת העקרונות הבסיסיים של תורת היחסות הוא שזמן, כמו מקום, תלוי במערכת הייחוס.

עבור כל שני אירועים $\binom{t_1}{x_1}$, $\binom{t_2}{x_2}$ ניתן לחשב גודל הנקרא אינטרוול $\boxed{\Delta\tau=\sqrt{(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2}}$.

האינטרוול הוא גודל אינווריאנטי בין מערכות יחוס שונות. כלומר, גם במערכת O': $\binom{t_1'}{x_1'}$, $\binom{t_2'}{x_2'}$ מקיימים:

$$\boxed{\Delta\tau=\sqrt{(t_2'-t_1')^2-(x_2'-x_1')^2}=\sqrt{(t_2-t_1)^2-(x_2-x_1)^2}}$$

במקרה ו- $\Delta x=0$, כלומר שני האירועים התרחשו באותו מקום, אזי $\Delta\tau$ מינימלי והוא ייקרא "הזמן העצמי". זהו פרק הזמן המינימלי שעובר בין שני האירועים. בכל מערכת ייחוס אחרת, בה $\Delta x\neq 0$, כפי שנשמר על האינטרוול $\Delta t>\Delta\tau$. על כן אומרים שבכל מערכת ייחוס אחרת הזמן מתארך. הוא מתארך בפקטור γ, בהתאם למהירות היחסית שבה המערכת בה נמדד Δt נעה ביחס למערכת בה נמדד $\Delta\tau$:

$$\boxed{\beta=\frac{v}{c}}$$

פקטור γ:

$$\boxed{\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

התארכות הזמן:

$$\boxed{\Delta t=\gamma\Delta\tau}$$

על כן ניתן לומר שהשעונים של גופים בתנועה יחסית (במהירויות קרובות למהירות האור) מתקתקים לאט יותר - הזמן שלהם עובר לאט יותר מהזמן של מי שנמצא במנוחה יחסית אליהם. כך, למשל, חלקיקים בעלי אורך-חיים קצר יכולים להגיע מהאטמוספירה לאדמה, למרות שהם היו אמורים להתפרק כבר באטמוספירה. למשל, ניסוי המיואונים:

פתרון שאלה של התפרקות באטמוספירה

1) צריך לזכור את ההבדל בין זמן חיים לבין זמן מחצית חיים: $\tau_{\frac{1}{2}}=\ln 2\cdot\tau$.

2) הזמן על כדור"א ארוך יותר, כי τ הוא זמן-עצמי (החלקיקים באותו מקום בכדור"א מבחינתם): $t_{\frac{1}{2}}=\gamma\tau_{\frac{1}{2}}$.

3) המרחק שהם נעים על כדור"א: $x=vt_{\frac{1}{2}}=(\beta c)(\gamma\tau_{\frac{1}{2}})$

4) גובה מעל פני הים (אם נתון גובה אטמוספירה H): $h=H-x$.

5) אחוז החלקיקים שמגיע לפני הים: $N=N_0e^{-t/\tau}$

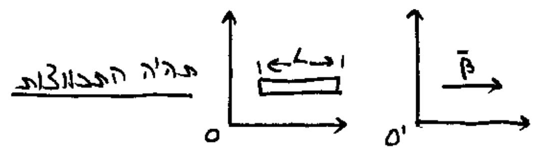
לשים לב ש- t,τ יהיו באותה מערכת ייחוס.

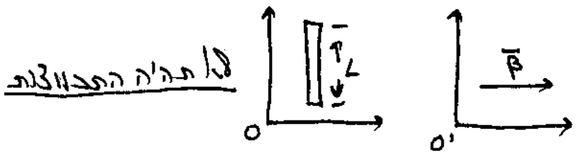
$$\cancel{\left.\begin{array}{l}\Rightarrow P=\frac{N}{N_0}=e^{-t/\tau}\\ t=\frac{h}{v}=\frac{h}{\beta c}\end{array}\right\}\ P=e^{-\frac{h}{\beta c\tau}}}$$

IV התכווצות האורך -

לסרגל שנמצא במנוחה במערכת O יש אורך L. בכל מערכת אחרת O' הנעה ביחס למערכת O במהירות שכיוונה מקביל לאורך המוט, המוט ייראה קצר יותר:

$$\boxed{L' = \frac{L}{\gamma}}$$





V יחידות חדשות

כדי לפשט את צורת הכתיבה של המשוואות השונות מגדירים עם שתי יחידות חדשות לזמן ולאורך:

1) מטר-אור: הזמן שלוקח לאור לעבור מטר אחד: $\boxed{t_{light-meter} \equiv t\cdot c = [m]}$

2) שנת אור: המרחק שהאור עובר בשנה: $\boxed{1\ light\text{-}year \equiv c\cdot(1\ year) = 9.46\times10^{15}\ m}$

מה שאומר שאנחנו עכשיו מודדים זמן במטרים. לאורך הקורס, כדי לפשט עוד יותר את המשוואות, משתמשים ב- $\boxed{c=1}$. צריך לשים לב לזה, בעיקר בהמשך.

VI חיבור מהירויות ועוד על מהירות יחסותית

- מהירות האור: מהירות האור תמיד קבועה ושווה $c=3\times10^8\ m/s$ עבור כל צופה בכל מערכת ייחוס.
- חיבור מהירויות: (הסימן $\pm$ בין המהירויות תלוי בכיוון היחסי ביניהן)

$$\boxed{\beta_{12} = \frac{\beta_1 \pm \beta_2}{1 \pm \beta_1\beta_2}}$$

$$\boxed{V_{12} = \frac{V_1 \pm V_2}{1 \pm \frac{V_1V_2}{c^2}}}$$

$$\boxed{\gamma_{12} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{12}^2}} = \gamma_1\gamma_2(1-\beta_1\beta_2)}$$

$\ominus$: $\xleftarrow{V_2}\square\xrightarrow{V_1}$

$\oplus$: $\square\xrightarrow{V_1}\ \square\xrightarrow{V_2}$

β_1 - מהירות מע' O' יחסית למע' O.

β_2 - מהירות הגוף יחסית למע' O'.

β_{12} - מהירות הגוף יחסית למע' O.

אף גוף לא יכול לנוע מהר יותר ממהירות האור. בחיבור מהירויות תמיד $\beta_{12} \le 1$.

- פונקציות היפרבוליות: חיבור שתי מהירויות הוא עניין פשוט והנוסחה מופיעה למעלה. ברגע שרוצים לחבר n מהירויות, העניין מסתבך. עבור פונקציות היפרבוליות קיים הקשר: $\tanh(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tanh\theta_1+\tanh\theta_2}{1+\tanh\theta_1\tanh\theta_2}$ שמאוד דומה לנוסחה למעלה. נשים לב גם ש- $\cosh^2\theta-\sinh^2\theta=1$ שמאוד מזכיר את האינטרוול.

הקשר בין פונקציות היפרבוליות לבין תורת היחסות:

$$\boxed{\begin{aligned} &\tanh\theta \leftrightarrow \beta \\ &\cosh\theta \leftrightarrow \gamma \\ &\sinh\theta \leftrightarrow \beta\gamma \\ &\theta = \tanh^{-1}\beta = \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1+\beta}{1-\beta}\right) \end{aligned}}$$

שיטת פתרון:

1) ממירים את ה-β השונות לזוויות θ.

2) מחברים את הזוויות θ: $\theta'=\sum_1 \theta_i$.

3) מוצאים את β': $\boxed{\beta'=\tanh\theta'=\tanh(\sum\theta_i)}$

- הגבול הקלאסי: מתחילים לדבר על אפקטים יחסותיים, על מהירויות יחסותיות, רק אם: $\boxed{v \gtrsim \frac{c}{7}}$

עבור מהירויות $v<\frac{c}{7}$ ניתן לומר $v\ll c$ ואז: $\gamma=[1-(\frac{v}{c})^2]^{-\frac12}\simeq 1+\frac12(\frac{v}{c})^2\simeq 1$

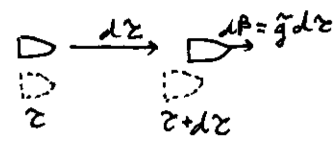
ולא מקבלים אפקטים כמו התארכות זמן או התכווצות אורך.

- חללית בתאוצה קבועה

התרגלנו לכך שתורת היחסות דנה רק במהירויות קבועות - מערכות אינרציאליות הן מערכות שנעות זו ביחס לזו במהירות קבועה. אז איך אפשר לתאר את חללית שנעה בתאוצה קבועה?

בצורה הקלאסית היינו מחשבים ומוצאים שעם הזמן מהירות החללית תעבור את מהירות האור. למשל, אחרי 10 שנים בתאוצה קבועה g $v=gt\simeq 10c$. לכן צריך שיטה אחרת.

נגדיר: <u>תאוצה קבועה היא מעבר כזה בין מערכות ייחוס</u>. נצייר חללית וירטואלית שנעה במהירות קבועה ובדיוק במהירות החללית יחסית לכדור הארץ - החללית הוירטואלית מייצגת את מערכת הייחוס הקודמת של החללית האמיתית.



1 קודם כל מעבירים את התאוצה ליחידות החדשות: $\boxed{\tilde{g}=\frac{g}{c^2}=\left[\frac{1}{m}\right]}$

2 זווית המהירות של החללית האמיתית $\theta_v'=\theta'=\tanh^{-1}(\beta(\tau'))$

והחללית הוירטואלית בזמן τ':

3 בזמן $d\tau$ מהירות החללית גדלה ב-$\tilde{g}d\tau$ וכיוון $d\beta=\tanh(d\theta)=d\theta=d\beta=\tilde{g}d\tau$

שמדובר בזוויות קטנות ניתן לומר $d\theta\approx\tanh(d\theta)$. $\Rightarrow \theta(\tau'+d\tau)=\theta'+d\theta=\theta'+\tilde{g}d\tau$

4 $\Rightarrow \boxed{\beta(\tau)=\tanh(\theta(\tau))=\tanh\left(\int_0^{\tau}\tilde{g}d\tau\right)=\tanh(\tilde{g}\tau)}$

כלומר, קיבלנו ביטוי יחסותי אנלוגי לביטוי הקלאסי: $v=gt \longrightarrow \beta(\tau)=\tanh(\tilde{g}\tau)$

5 כדי למצוא את מיקום החללית בזמן τ נעבור לפי: $\frac{dx}{dt}=\beta=\tanh(\tilde{g}\tau)$

אבל נשים לב ש-dt הוא הזמן בכדור הארץ ואנחנו עובדים בזמן החללית: $dt=\gamma d\tau=\cosh\theta\, d\tau$

$\Rightarrow \boxed{dx=\sinh(\tilde{g}\tau)d\tau} \Rightarrow x=\frac{1}{\tilde{g}}\left[\cosh(\tilde{g}\tau)-1\right]$

<u>מעבר לכדור הארץ</u>

כל החישובים למעלה נעשו מתוך מערכת החללית. ניתן לעקוב אחרי החללית גם מכדור הארץ:

צריך לעבור את הנקודות הבאות: $\Delta t=\gamma\Delta\tau$ כיוון שזמן החללית הוא זמן אמיתי;

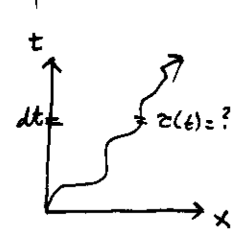
$V+\Delta V=\frac{V+\Delta V'}{1+V\Delta V'}$ כיוון שמדובר בחיבור מהירויות יחסותי ו-$\Delta V'$ הוא תוספת המהירות של החללית

במערכת שלה; כיוון ש- $d\tau\to 0$ בכתובנו ניתן לומר $V\Delta V'\ll 1$ ולמחוק בקירובים.

עכשיו בסוף מבינים את תאוצת החללית לתאוצה הנצפית על כדור הארץ $a_0=\frac{\Delta V'}{\Delta t'}\longrightarrow\frac{\Delta V}{\Delta t}$

ועל היתר זה אינטגרלים של התאוצה.

- <u>זמן עצמי של חלקיק עם מסלול עקום</u>



1 משמר האינטרוול: $(d\tau)^2=(dt)^2-(dx)^2$

2 $d\tau=\sqrt{(dt)^2-(dx)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\,dt=\sqrt{1-\beta(t)^2}\,dt$

3 $\boxed{\tau=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\beta(t)^2}\,dt}$

VII טרנספורמציית לורנץ

- טרנס' לורנץ היא טרנספורמציה שמעבירה את המרחב-זמן (t,x,y,z): היא מעבירה קואורדינטות של נקודה במערכת O לקואורדינטות במערכת 'O (הנעה במהירות קבועה β יחסית ל-O)
כך שהאינטרוול נשמר: טרנס' לורנץ חייבת לקיים: $(c\Delta t)^2-(\Delta x)^2=(c\Delta t')^2-(\Delta x')^2$

{נשים לב שמופיע פה ct ולא t. במעבר ליחידות החדשות, בהן $c=1$, נקבל t).

תנאים לקיום טרנס' לורנץ בכתיב מטריצה

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

1) מטריצה סימטרית.
2) שני איברי האלכסון שווים.
3) הדטרמיננטה שווה ל-1: $A_{11}^2-A_{12}^2=1$ (שימור האינטרוול).
4) מתוך המטריצה ניתן למצוא את המהירות β שמאפיינת את המערכת: $\boxed{\beta=\frac{A_{12}}{A_{11}}}$

- **תנועה במימד אחד - ציר X**

בתנועה במימד אחד (נניח $\hat{x}$) הזמן והקואורדינטה x יתערבבו וישתנו ביחד. $\hat{y},\hat{z}$ לא ישתנו.

יחידות ישנות	יחידות חדשות	כתיב מטריצה
$t=\frac{t'+\frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ $\Rightarrow$	$t=\gamma(t'+\beta x')$	$\boxed{\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix}}$
$x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ $\Rightarrow$	$x=\gamma(\beta t'+x')$	

זו טרנס' לורנץ ממערכת 'O למערכת O, כאשר מערכת 'O נעה במהירות v יחסית ל-O.

אם נרצה את הטרנס' ההפוכה נשתמש במטריצה ההופכית: $\boxed{\begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix}}$

בשלושה מימדי מרחב, כאמור, $\hat{y},\hat{z}$ לא ישתנו ולכן:

$$\boxed{\begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}}$$

תנועה במימד אחד - ציר y

הזמן t ו-y יתערבבו; x,z לא ישתנו:

$$\boxed{\begin{bmatrix} t \\ x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \gamma & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{bmatrix}}$$

תנועה במימד אחד - ציר z

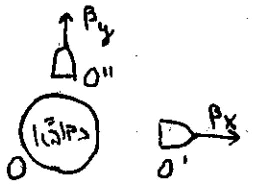
$$\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \beta\gamma \\ 0 & 0 & \beta\gamma & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix}}$$

- תנועה בשני מימדים

בקורס הזה, כיוון שהפקולטה הבל צלת במדה מק׳ פעם, לא נעסוק בתנועה שכוללת מהירויות של יותר מציר אחד באותה מערכת. אבל אין שום סיבה שלא נוכל לעבור ממערכת ′O שנעה בציר x יחסית למערכת O, למערכת ″O שנעה בציר y יחסית למערכת O.

בכל המקרים האלה, בהן יש מערכות ביניים, פשוט עושים טרנס׳ ממערכת למערכת עד שמקבלים מטריצה אחת (גדולה) שמתארת את הטרנס׳ ישירות.

חשוב לזכור: בכל נוהלים על הסימן של β. נזכור: אם ′O נעה ב-β יחסית ל-O אז:



1) טרנס׳ מ-′O ל-O: $(+\beta)$.

2) טרנס׳ מ-O ל-′O: $(-\beta)$.

נסתכל על הדוגמה השכיחה ביותר:

איך ייראו אירועים במע׳ ′O במע׳ ″O? נעשה טרנס׳ $O' \to O \to O''$

$$\begin{bmatrix} t \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_x & \beta_x\gamma_x & 0 \\ \beta_x\gamma_x & \gamma_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} t'' \\ x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_y & 0 & -\beta_y\gamma_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta_y\gamma_y & 0 & \gamma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} t'' \\ x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_y & 0 & -\beta_y\gamma_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta_y\gamma_y & 0 & \gamma_y \end{bmatrix}}_{\text{המעבר מ-O ל-O''}} \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_x & \beta_x\gamma_x & 0 \\ \beta_x\gamma_x & \gamma_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{המעבר מ-O' ל-O}} \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{bmatrix}$$

במקרה כזה אפשר לשאול גם מה יהיה כיוון התנועה של הראשית ′O במערכת של ″O:

כיוון, כמובן, זה הזווית בין v_y לבין v_x:

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\dot{y}''}{\dot{x}''} = \frac{y''/t''}{x''/t''} = \frac{y''}{x''}}$$

ואת ″x, ″y מוצאים לפי הטרנספורמציה שמצאנו בהתחלה.

- תנועה יחסית במישור x-y

הפעם המערכת ′O נעה במהירות β ובזווית θ יחסית למערכת O. איך אירועים ב-′O ייראו ב-O?

צריך להשתמש פה גם בטרנס׳ לורנץ וגם בטרנס׳ סיבוב: נעשה:

$$\boxed{O \xleftarrow{\text{סיבוב}} \bar{O} \xleftarrow{\text{לורנץ}} \bar{O}' \xleftarrow{\text{סיבוב}} O'}$$

$$\boxed{\text{סיבוב נגד כיוון השעון} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{\text{סיבוב עם כיוון השעון} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}$$

טרנס׳ סיבוב נגד כיוון השעון

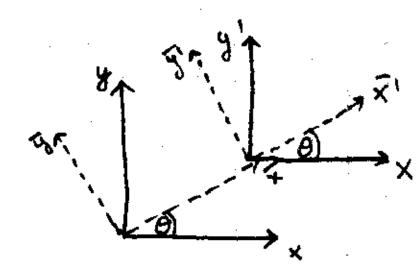
$$\begin{bmatrix} \bar{t}' \\ \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & +\sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \end{bmatrix}$$

טרנס׳ לורנץ לתנועה בציר $\bar{x}$

$$\begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{t}' \\ \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{bmatrix}$$

טרנס׳ סיבוב עם כיוון השעון

$$\begin{bmatrix} t \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$$



- חיבור מהירויות בטרנס' לורנץ

ניתן לקבל את נוסחת חיבור המהירויות $\beta_{12} = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$ ישירות מטרנס' לורנץ.

נסתכל על מערכת "0 שנעה במהירות β_2 יחסית למערכת '0 שנעה ב-β_1 יחסית ל-0.

המהירות של "0 יחסית ל-0 תתקבל מטרנס' מורכבת:

$$\left.\begin{array}{l}\begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \gamma_2 \begin{bmatrix} 1 & \beta_2 \\ \beta_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t'' \\ x'' \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = \gamma_1 \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 \\ \beta_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix}\end{array}\right\} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = \gamma_1\gamma_2 \begin{bmatrix} 1 & \beta_1 \\ \beta_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta_2 \\ \beta_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t'' \\ x'' \end{bmatrix} = \gamma_1\gamma_2 \begin{bmatrix} 1+\beta_1\beta_2 & \beta_2+\beta_1 \\ \beta_1+\beta_2 & \beta_1\beta_2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t'' \\ x'' \end{bmatrix}$$

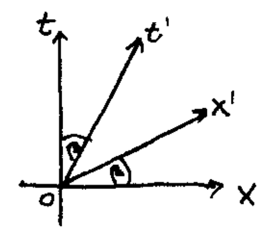
בגמ' $\boxed{6}$ אמרנו שאת המהירות β אפשר לקבל מהמטריצה: $\beta = \frac{A_{12}}{A_{11}} = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$.

- הצגה גרפית - טרנספורמציית הצירים

ניתן להציג את טרנס' לורנץ בצורה גרפית בשימוש את הטרנס' של הצירים של דיאגרמת מינקובסקי:

נציג את מערכת '0 (שנעה ב-β יחסית ל-0) במערכת 0:

ציר 'x מוגדר כאוסף הנקודות $\binom{0}{x'}$ וציר 't מוגדר כ: $\binom{t'}{0}$.



ציר 't: $\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma t' \\ \beta\gamma t' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \beta t \\ \tan\left(\frac{x}{t}\right) = \beta \end{array}$

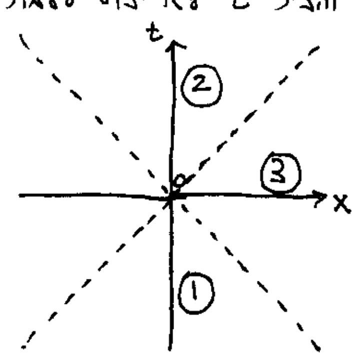
ציר 'x: $\begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\beta x' \\ \gamma x' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} t = \beta x \\ \tan\left(\frac{t}{x}\right) = \beta \end{array}$

טרנס' לורנץ לוקחת מערכת צירים ומכווצת את הזווית בין הצירים, כשהזווית בין הציר החדש לציר הקודם ('x מול x ו-'t מול t) היא המהירות היחסית β בין שתי המערכות.

$\boxed{\text{VIII}}$ המרחב-זמן - Timespace

בהמשך לטרנס' הצירים, ניתן לבנות את מרחב מינקובסקי ולשים לב להתנהגות האינטרוול והמשמעויות שנובעות מהתנהגות זו.

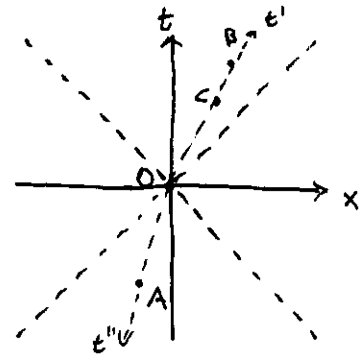
ראינו שטרנס' לורנץ מכווצת את הזווית בין הצירים בזווית β. זווית זו יכולה לשאוף ל-45°, או $\beta=1$. מהירות זו היא מהירות האור. הציר 'x לא יכול לעבור את ציר האור כלפי מעלה, והציר 't לא יכול לעבור אותו כלפי מטה. על-כן אנו מקבלים שלושה אזורים במרחב:



①: העבר האבסולוטי - אזור בו אפשר להעביר צירי זמן 't. אזור זה נמצא בעבר של הראשית 0.

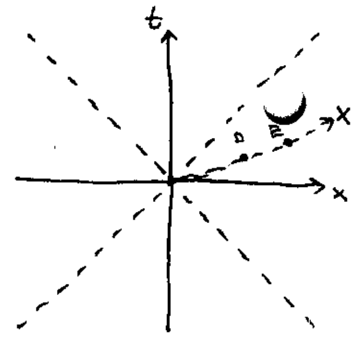
②: העתיד האבסולוטי - אזור בו אפשר להעביר צירי זמן 't. אזור זה נמצא בעתיד של הראשית 0.

③: הפרדה מרחבית - אזור בו ניתן להעביר צירי מרחב 'x.



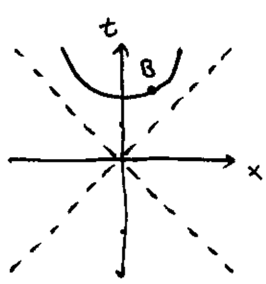
<u>הפרדה זמנית</u>: באיזורים ①,② ניתן להעביר ציר זמן t' והאינטרוול חיובי: $\boxed{t^2-x^2>0}$.
כיון שהוא חיובי כריב' הזמן שלו פומענט וקוראים לו גם "אינטרוול זמני".
באיזורים של הפרדה זמנית ניתן להגיע מנקודה אחת לשנייה בתנועה מתחת למהירות האור. לכן מידע יכול לעבור בין הנקודות <u>ומתקיים קשר של סיבה ותוצאה</u>. A נמצא בעבר של O ולכן יכול להשפיע עליו. B נמצא בעתיד של O ולכן יכול להיות מושפע ממנו.

אירועים מופרדים זמנית, כמו B,C, הם אירועים שניתן להעביר דרכם ציר t' כך שהם מתרחשים באותו מקום $(x=0)$ אבל בזמנים שונים.



<u>הפרדה מרחבית</u>: באיזור ③ ניתן להעביר ציר מרחב x' והאינטרוול שלילי: $\boxed{t^2-x^2<0}$.
כיון שהוא שלילי כריב' המרחב שלו פומענט וקוראים לו גם "אינטרוול מרחבי".
אירועים מופרדים מרחבית, כמו D,E, הם אירועים שניתן להעביר דרכם ציר x' כך שהם מתרחשים סימולטנית $(t=0)$ אבל במקומות שונים.
כדי לחבר את הנקודות D,E היינו צריכים להעביר קו שהמשמעות הפיזיקלית שלו היא שמידע בין הנקודות עובר במהירות שגדולה ממהירות האור. זה לא אפשרי, ולכן נקודות מופרדות מרחבית לא יכולות להשפיע אחת על השנייה - <u>אין ביניהן קשר של סיבה ותוצאה</u>.

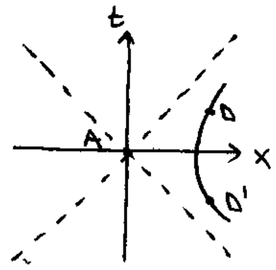
<u>הפרדה אורית</u>: אירועים לאורך צירי האור, בהם $t^2-x^2=0$, נקראים מופרדים אורית. אי-אפשר להעביר עליהם צירי זמן t' או מרחב x'. לכן בכל המערכות אירועים על צירי האור יתרחשו בזמנים שונים ובמקומות שונים.



<u>הגיאומטריה ההיפרבולית של הטרנספורמציה</u>

את האירוע B ניתן לתאר בהיפרבולה של אירועים שמקיימים $\tau_B^2=t^2-x^2 \Rightarrow t=\sqrt{\tau_B^2+x^2}$. ההיפרבולה תתאר את אותו האירוע במערכות ייחוס שונות. בתיאוריה $t=\pm\sqrt{\tau_B^2+x^2}$, אבל:

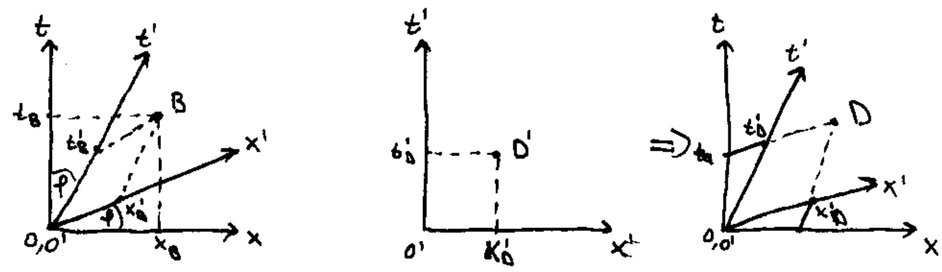
<u>טענה</u>: אם $t^2>x^2$ (הפרדה זמנית) וגם $t>0$, אזי מתקיים תמיד (לכל טרנס' לורנץ) $t'>0$.
<u>משמעות</u>: האירוע B נמצא בעתיד של כל צופה (כל מי שנמצא בראשית של ציר t' כלשהו שעובר דרך ההיפרבולה). אין אף צופה שיראה את B בעבר שלו. יש צופה אחד שרואה את B ואת הראשית באותו מקום (בזמן אמיתי) ומבחינתו - B בעתיד.



ניתן גם לתאר היפרבולה של אירועים עבור ההפרדה המרחבית. במקרה זה האירועים יכולים להפוך את הסדר - חלק מהצופים יראו אותם בעבר וחלק יראו אותם בעתיד. אבל הסיבתיות עדיין נשמרת. ~~[illegible]~~ כיוון שאי-אפשר להעביר מידע בין A ל-D (אין תנועה מעל מהירות האור), A לא ישפיע על D ו-D לא ישפיע על A.

✱ <u>טרנספורמציית הצירים - תוספת</u>

הצגנו את הצירים של מערכת "תנוס אחת" (ס') במערכת הצירים של מערכת אחרת (ס). כדי למצוא את ערך הקואורדינטות בצירים החדשים מעבירים קווים <u>מקבילים</u> לצירים החדשים:



במערכת ס' הייתה במנוחה ראינו את D' כמו שלמדנו בגילים (אנכים לצירים). כש-ס' נעה יחסית ל-ס ומציגים את שתי המערכות ביחד, הנקודות x'_D, t'_D "עולות" יחסית למיקום הקודם וקל לראות שהמרחק $O'D' > OD$.

IX <u>אפקט דופלר</u>

מקור פולט פולס אור בהפרש זמנים קבוע Δt_s (לפי שעון המקור).

עבור צופה <u>המתרחק</u> מהמקור במהירות β, הפרש הזמנים בין הפולסים:

$$\boxed{\Delta t_{obs} = \Delta t_s\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}}$$

עבור צופה <u>המתקרב</u> למקור במהירות β:

$$\boxed{\Delta t_{obs} = \Delta t_s\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}$$

<u>הסחה ספקטרלית</u>/<u>הסחה בתדר</u>:

$$\boxed{\left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda_s}\right| = \left|\frac{\Delta t}{t_s}\right|}$$

עבור צופה <u>מתקרב</u>:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta f}{f} = 1-\sqrt{\frac{1-|\beta|}{1+|\beta|}}}$$

$\boxed{X}$ דינמיקה יחסותית

-4-וקטור המיקום

ביחידות הישנות:

$$\boxed{r^{(4)} = (ct, \bar{r}) = (ct, x, y, z)}$$

$$\boxed{\|r^{(4)}\|^2 = (ct)^2 - (x^2+y^2+z^2) = \text{האינטרוול}}$$

אלגברה של 4-וקטורים

כאשר: $A^{(4)} = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A_0, \bar{A})$:

$$\boxed{A^{(4)} \cdot B^{(4)} = A_0 B_0 - \bar{A}\cdot\bar{B}}$$

$$\boxed{\|A^{(4)}\| = A_0^2 - (\bar{A})^2}$$

כדי לבצע את המכפלה הסקלרית משתמשים במטריקה של מרחב מינקובסקי G:

$$A^{(4)} \cdot B^{(4)} = A^{(4)} \cdot G \cdot B^{(4)} = (A_0, A_1, A_2, A_3)\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{G = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix}}$$

הגודל של ה-4-וקטור הוא אינווריאנטי.

-4-וקטור המהירות

$$\boxed{V^{(4)} = \frac{d}{d\tau} r^{(4)} = \gamma \frac{d}{dt}(ct, \bar{r}) = \gamma(c, \bar{v})}$$

מהירות האור היא הגודל האינווריאנטי של המהירות:

$$\boxed{\|V^{(4)}\|^2 = c^2}$$

אם מקבלים 4-וקטור כללי $V^{(4)} = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ ורוצים למצוא את V_x אז מחלקים:

ביחידות החדשות: $\boxed{V_x = \frac{V_1}{V_0} = \frac{\gamma V_x}{\gamma}}$

ביחידות הישנות: $\boxed{V_x = \frac{V_1}{V_0/c} = \frac{\gamma V_x}{\gamma c/c}}$

חיבור מהירויות: נסתכל על טיל שנורה מחללית במהירות v_1. החללית במהירות v_2 יחסית לכדוה"א.

טיל במערכת החללית $V^{(4)} = (c\gamma_1, v_1\gamma_1, 0, 0)$

טיל במערכת כדוה"א $V^{(4)} = \begin{bmatrix} \gamma_2 & \frac{v_2}{c}\gamma_2 \\ \frac{v_2}{c}\gamma_2 & \gamma_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c\gamma_1 \\ v_1\gamma_1 \end{bmatrix} = \gamma_1\gamma_2\begin{bmatrix} c + \frac{v_1 v_2}{c} \\ v_2 + v_1 \end{bmatrix}$

גם כאן מקבלים את הנוסחה המוכרת:

$$V_x = \frac{V_1^{(4)}}{V_0^{(4)}/c} = \frac{\gamma_1\gamma_2(v_2+v_1)}{\gamma_1\gamma_2\left(c + \frac{v_1 v_2}{c}\right)/c} = \frac{v_2+v_1}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

-4-וקטור התנע-אנרגיה

$$\boxed{P^{(4)} = mV^{(4)} = \gamma(mc, m\bar{v}) = \gamma(mc, \bar{P}_{classic}) = \left(\frac{E}{c}, \bar{P}_{rel}\right)}$$

האנרגיה של חלקיק ($\boxed{E_0 = mc^2 \text{ אנרגיית המנוחה}}$):

$$\boxed{E \equiv \gamma mc^2 = \gamma E_0}$$

האינטרוול של $P^{(4)}$ הוא מסת המערכת:

$$\boxed{\|P^{(4)}\|^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - (\bar{P}_{rel})^2 = (mc)^2}$$

$$c = 1 \Rightarrow \|P^{(4)}\| = \sqrt{E^2 - P^2} = m$$

אנרגיה קינטית: $\boxed{T = E - E_0 = E - mc^2 = mc^2(\gamma - 1)}$

הקשר בין מהירות לבין אנרגיה: $\boxed{\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}}$

יח' אנרגיה מקובלות: $1\ eV = 1.6 \times 10^{-12}\ erg$

$1\ MeV = 10^6\ eV \quad , \quad 1\ GeV = 10^9\ eV$

<u>תנע-אנרגיה של מערכת חלקיקים</u>

התנע הכולל הוא פשוט סכום התנעים. $p^{(4)} = \sum_{i=1}^{N} p_i^{(4)}$

סוכמים בנפרד את הרכיבים השונים (כמו בוקטורים רגילים).

מסת המערכת היא האינווריאנט של התנע הכולל: $(Mc)^2 = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - p^2$

לפי ההגדרה החדשה מקבלים

את האדיטיביות של המסה: $\boxed{M^2 \neq (m_1 + m_2)^2}$

$$\left.\begin{aligned} (m_1 c)^2 &= \left(\frac{E_1}{c}\right)^2 - p_1^2 \\ (m_2 c)^2 &= \left(\frac{E_2}{c}\right)^2 - p_2^2 \\ (Mc)^2 &= \left(\frac{E_1 + E_2}{c}\right)^2 - (p_1 + p_2)^2 \end{aligned}\right\}$$

צריך להתרגל לחשוב על מסה כיצור מתמטי מופשט - זה לא יותר מהאינווריאנט של התנע-אנרגיה.
המסה שאנחנו מכירים מיום-יום היא מסת המנוחה; אבל ברגע שהגוף נמצא בתנועה יחסית מתווספת גם האנרגיה הקינטית שלו.

<u>חוק שימור התנע-אנרגיה של מערכת חלקיקים</u>

<u>כאשר אין כוחות חיצוניים התנע-אנרגיה של מערכת חלקיקים נשמר.</u>

<u>שיטות פתרון לתרגילי התנגשות</u>

1) מסת המנוחה של כל חלקיק היא אינווריאנטית - התנע והאנרגיה שלו יכולים להשתנות, אבל $m^2 = E^2 - p^2$ בכל מקרה. זה נותן קשר אחד.

2) שימור תנע - רכיבי התנע והאנרגיה של ה-4-וקטור $p^{(4)}$ נשמרים לפני ואחרי התנגשות.

3) מרכז מסה - לפעמים יהיה נוח יותר לעבור למערכת מרכז המסה, שמוגדרת כמערכת בה רכיב התנע $p=0$. מערכת מרכז המסה נעה במהירות $\boxed{\beta = \frac{p}{E}}$ ביחס למערכת הנתונה, כאשר p, E הם רכיבי ה-4-וקטור לפני ההתנגשות.

$$\begin{bmatrix} E' \\ p' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(E - \beta p) \\ \gamma(p - \beta E) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(E - \beta p) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\left(E - \frac{p^2}{E}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

4) הקשר $\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}$ מאוד נוח כדי למצוא את מהירות החלקיק (כיוון שבתרגילים האלה אנחנו בעיקר משחקים עם אנרגיות.

XI חלקיקים שנעים במהירות האור

ישנם חלקיקים מסוימים - פוטונים (γ) ונייטרינוס (ν)-שנעים במהירות האור. לחלקיקים אלה אין מסה.

כמו כן, עבור חלקיקים אלה נביא התנע $\quad \bar{V} = \frac{\bar{P}}{E/c} \Rightarrow c = \frac{P}{E/c^2} \Rightarrow E = Pc$

שנה לגבי האנרגיה: $\boxed{E=P}$ $\quad c=1 \;:\; E=P \Rightarrow m^2 = E^2 - P^2 = 0$

מתארים קשר בין תדירות פוטון לבין האנרגיה שלו: $\boxed{E = hf = \frac{hc}{\lambda}}$

כאשר h הוא קבוע פלנק: $\boxed{h = 6.625 \times 10^{-27}\ erg \cdot s = 4.13 \times 10^{-21}\ MeV \cdot s}$

וטרנספורמציית האנרגיה של פוטון במעבר בין מערכות ייחוס היא בדיוק כמו אפקט דופלר:

מתרחק: $E' = E\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$

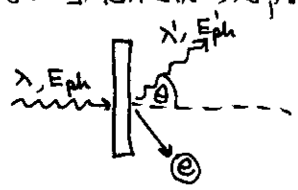
מתקרב: $E' = E\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$

פיזור קומפטון-

פוטון פוגע במתכת ונפלטים אלקטרון ופוטון, בזווית מסוימת לציר הפגיעה.

זווית הפיזור (הזווית בה יצא הפוטון לאחר ההתנגשות) תלויה בהפרש האנרגיה של הפוטון, ולכן אפשר לקשור את הזווית גם להפרש באורך הגל:

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta)}$$



אורך גל קומפטון: $\boxed{\lambda_{compton} = \frac{h}{mc}}$

שיטות פתרון=

1) פיזור קומפטון: אם נותנים את אנרגיית הפוטון, לצורך $\lambda = \frac{hc}{E}$ נוח להשתמש בנוסחה.

2) התפרקות חלקיקים: לזכור את הקשרים הבאים:

א) עבור חלקיקים חסרי מסה: $E_\gamma = P_\gamma$, $E_\nu = P_\nu$.

ב) בגלל שימור תנע, התנע של החלקיק השני, יחד עם התנע (או אנרגיה) של החלקיק חסר-המסה יתנו את התנע ההתחלתי. זה מצמצם משתנה.

ג) אם החלקיק המקורי במנוחה, אז מסת המנוחה שלו, שהיא אנרגיית המנוחה שלו, תהיה שווה לסכום האנרגיות של החלקיקים החדשים.

✻ תוספת- אנרגיית הקשר

ראינו שבדרך מסה של מערכת חלקיקים גדולה מסכום המסות. זה נובע מקיומה של אנרגיה נוספת (קינטית, פוטנציאלית) שמאפיינת את המערכת.

קיים גם מצב הפוך - מסת המערכת קטנה מסכום מסות המנוחה שמרכיבות אותה. זה קורה כשכדי לפרק את המערכת צריך להשקיע אנרגיה בצורה כלשהי, כמו שיתפרק את האלמנטים. למשל, אטום:

$E = m_p c^2 + m_e c^2 + (-\Delta E_{קשר}) \Rightarrow M_{אטום} < m_p + m_e$

$\boxed{\mathrm{II}}$ מבוא לתורת הקוונטים

$\boxed{\mathrm{I}}$ מודל האטום של בוהר

בוהר יצא מנקודת הנחה שכל מאפייני האטום (כגון סיבוב האלקטרונים, כמות אנרגיה, מהירות וכו')
מקוונטטות - כלומר יש רק ערכים מסוימים שהם יכולים לקבל.

הוא התחיל את התיאור שלו בתנע הזוויתי והניח:

$$\boxed{L_n = \frac{h}{2\pi} n = \hbar n = mvr}$$

אח"כ עברים להסתכל על הכח בין האלקטרונים באטום לבין
הפרוטונים, כאשר N הוא מספר הפרוטונים. את זה השוים לכח הצנטריפוגלי:

$$F_e = \frac{Ne^2}{r^2}$$

$$F_{cent} = \frac{mv^2}{r} = \frac{Ne^2}{r^2}$$

ועכשיו מקבלים את מהירות האלקטרון:

$$\Rightarrow mvr = \frac{Ne^2}{v} \Rightarrow \boxed{V_n = \frac{Ne^2}{L} = \frac{Ne^2}{\hbar}\frac{1}{n}}$$

נהוג לרשום את המהירות גם בצורה הבאה:

$$\boxed{V_n = N\alpha c \frac{1}{n}}$$

כאשר α הוא קבוע של הטבע:

$$\boxed{\alpha \equiv \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}}$$

עכשיו אפשר למצוא את הרדיוסים:

$$\boxed{r_n = \frac{Ne^2}{mv^2} = \frac{\hbar^2}{Nme^2} n^2}$$

ואם נכניס פנימה את α:

$$\boxed{r_n = \left(\frac{\hbar}{mc\alpha}\right) \frac{n^2}{N}}$$

רמות האנרגיה: את רמות האנרגיה מוצאים מתוך הקשרים הבאים:

א) האנרגיה הקינטית של האלקטרון:

$$E_K = \frac{1}{2} m V_n^2$$

ב) האנרגיה הפוטנציאלית של המערכת:

$$E_p = -N \frac{e^2}{r_n}$$

ג) האנרגיה הכוללת:

$$E_n = E_K + E_p$$

בדיקה: כדי לבדוק האם קיבלנו ביטוי הגיוני לאנרגיה נבדוק האם:

$$\boxed{E \approx N^2 (13.6\ eV)}$$

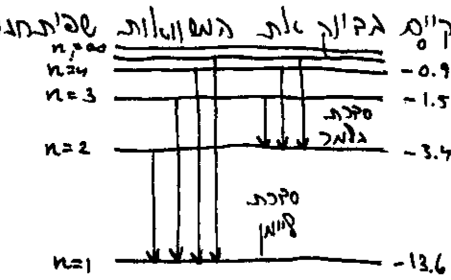
אטום המימן -

מקיים בדיוק את המשוואות שפיתחנו למעלה, כאשר $N=1$.

$$r_n = \left(\frac{\hbar}{mc\alpha}\right) n^2$$

$$V_n = \alpha c \frac{1}{n}$$

$$E_n = -\frac{1}{2} m\alpha^2 c^2 \frac{1}{n^2} = -13.6 \frac{1}{n^2}\ eV$$



באינסוף האלקטרון בורח מהגרעין. על-כן אנרגיית היסוד, $-13.6eV$, היא אנרגיית היינון של האטום.

ספקטרום אטום המימן -

כאשר m הוא מס' הסדרה ו-n מס' הקו בתוך אותה סדרה:

$$\boxed{\frac{1}{\lambda_{n,m}} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)}$$

$$\boxed{R = \left|\frac{E_1}{hc}\right| = 1.097 \times 10^5\ cm^{-1}}$$

מציאת אורך-גל של פוטון נפלט

כפי שכבר ראינו בעבר, רק שהפעם מדובר ברמות אנרגיה:

$$f = \frac{\Delta E}{h}$$

$$\boxed{\lambda_\Delta = \frac{c}{f} = \frac{ch}{\Delta E}}$$

II. האלקטרון כגל - הנחת דה-ברולי

דה-ברולי הניח שכמו הפוטונים, גם לאלקטרונים יש תכונות גל-חלקיק, לפי הנחה זו

ניתן לחשב לאלקטרון אורך גל: כאשר p הוא תנע האלקטרון: $\boxed{\lambda_e = \frac{h}{p}}$

אם מיישמים הנחה זו באטום המימן של בוהר מקבלים את הקשר הבא:

$$\lambda_n = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v_n} = \frac{h}{m_e c\alpha} n = \lambda_{compton} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot n$$

מתוך משוואות האטום של בוהר ניתן לראות גם ש: $r_n = \left(\frac{\hbar}{m c\alpha}\right) n^2 = \lambda_{compton} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{2\pi} n^2$

ועכשיו, נסיק מזה חשוב, נמצא את היקף המסלול ה-n: $\boxed{2\pi r_n = \lambda_{compton} \frac{1}{\alpha} n^2 = \lambda_n \cdot n}$

מה שאומר שבמסלול ה-n אורך הגל של האלקטרון נכנס n פעמים. זה מסביר למה האלקטרון יכול להימצא ברדיוסים מסוימים בלבד - רק רדיוס שבו מקיים $2\pi r_n = \lambda_n \cdot n$ אחרת אורך הגל שלו לא נכנס מספר שלם של פעמים ולכן הוא יתאבך עם עצמו וייהרס.

III. התפלגות בולצמן -

מתארת את יחס האטומים בין רמות האנרגיה השונות. יחס האכלוס של רמה אחת (E_1) מול האכלוס של רמה אחרת (E_2) נתון ע"י: $\boxed{\frac{P(E_2)}{P(E_1)} = e^{-\frac{(E_2-E_1)}{k_B T}}}$

לכן ככל ש-n קטן יותר הסיכוי של האטומים להמצא ברמה ה-n גדול יותר: $P(E_n) \sim e^{-\frac{E_n}{k_B T}}$

כדי לחשב במדויק את ההסתברות של רמה בודדת מנרמלים את ההסתברויות כך שסכומם יהיה אחד:

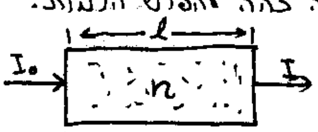
$$\sum_n P(E_n) = 1 \Rightarrow \boxed{P(E_n) = \frac{1}{N} e^{-\frac{E_n}{k_B T}}, \quad N = \sum_n e^{-\frac{E_n}{k_B T}}}$$

כלומר: סוכמים את $e^{-\frac{E_n}{k_B T}}$ על כל רמות האנרגיה באטום כדי לקבל את N. ב-N הזה משתמשים כדי לחשב את הסיכוי $P(E_n)$ של רמה בודדת.

מכאן אפשר גם למצוא את האנרגיה הממוצעת של גז אטומים: $\boxed{\langle E \rangle = \sum_n E_n P(E_n)}$

IV. בליעה

אטום יכול לעלות מרמה נמוכה לרמה גבוהה יותר ע"י בליעת פוטון עם אנרגיה זהה להפרש הרמות.



נסתכל על מיכל גז באורך l וצפיפות אטומים בולעים n.

אם מגיעה אלומת פוטונים בעוצמה I_0 ויוצאת אלומה בעוצמה I,

הקשר בין שתי האלומות נתון ע"י: $\boxed{I = I_0 e^{-\sigma n l}}$

כאשר σ הוא חתך הפעולה לבליעה $[cm^2]$ ו-nl הוא מס' האטומים הבולעים ליח' שטח.

כשמחממים את הגז מגדילים את הסיכוי להימצא ברמות אנרגיה גבוהות יותר (בולצמן) ולכן צפיפות האטומים הבולעים n תגדל.