ממפי"ס 2 - סיכום אנליזה וקטורית

הגדרות בסיסיות של אנליזה וקטורית

סקלר: גודל כלשהו. יש לשים לב שהוא לא משתנה בשמחליפים מערכות קואורדינטות.

וקטור: גודל בעל רכיבי x,y,z (לפחות אחת מהם) שכן משתנה בשמחליפים קואורדינטות.

שדה סקלרי: פונקציה שנותנת תוצאה מספרית.

שדה וקטורי: פונקציה שנותנת וקטור. למשל: $\bar{A}(x,y,z) = x^2\hat{x} + y^2\hat{y} + z^2\hat{z}$

- מערכת קואורדינטות בונים משלושה וקטורי יחידה שווים זה לזה. הם מסומנים בכובע וגודלם ($|\hat{x}|$) שווה אחד.
- ~~שיטות~~ ציקליים: סדר הרכיבים בוקטור חשוב. $\hat{x}\to\hat{y}\to\hat{z}$ נקראת מערכת ימנית. $\hat{x}\to\hat{y}\to\hat{z}$ נקראת מערכת שמאלית. כל עוד צבים בכיוון מוגדר הסימן נשאר קבוע. אם "מבלבלים" רכיבים צריך להחליף סימן.

פעולות בסיסיות עם וקטורים

1) $\bar{A}+\bar{B} = \bar{B}+\bar{A}$

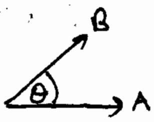
2) $\bar{A}+(\bar{B}+\bar{C}) = (\bar{A}+\bar{B})+\bar{C}$

3) $m\cdot\bar{A} = \bar{A}\cdot m$

4) $(m+n)\bar{A} = m\bar{A}+n\bar{A}$

5) $m(n\bar{A}) = (mn)\bar{A}$

6) $m(\bar{A}+\bar{B}) = m\bar{A}+m\bar{B}$



מכפלת dot (תוצאה: סקלר)

※7) $\boxed{\bar{A}\cdot\bar{B} = AB\cos\theta}$

8) $\bar{A}\cdot\bar{B} = \bar{B}\cdot\bar{A}$

9) $\bar{A}(\bar{B}+\bar{C}) = \bar{A}\bar{B}+\bar{A}\bar{C}$

10) $m(\bar{A}\bar{B}) = (m\bar{A})\bar{B} = (m\bar{B})\bar{A}$

※11) $\hat{x}\hat{x} = \hat{y}\hat{y} = \hat{z}\hat{z} = 1 \quad \{\cos 0 = 1\}$

※12) $\hat{x}\hat{y} = \hat{y}\hat{z} = \hat{z}\hat{x} = 0 \quad \{\hat{x}\perp\hat{y}\perp\hat{z} \Rightarrow \cos 90 = 0\}$

13) $\left.\begin{aligned}\bar{A} &= A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}\\ \bar{B} &= B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z}\end{aligned}\right\}\ \boxed{\bar{A}\cdot\bar{B} = A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}$

אור גבאי ©

מכפלת cross (תוצאה: וקטור)

※14) $\boxed{\bar{A}\times\bar{B} = \underbrace{AB\sin\theta}_{\text{גודל}}\cdot\underbrace{\hat{u}}_{\text{כיוון}}}$

אם המכפלה נגד כיוון השעון - הכיוון למעלה.
עם " " " - למטה.

15) $\hat{x}\times\hat{y}=\hat{z}$, $\hat{y}\times\hat{z}=\hat{x}$, $\hat{z}\times\hat{x}=\hat{y}$ שינויים ציקליים!

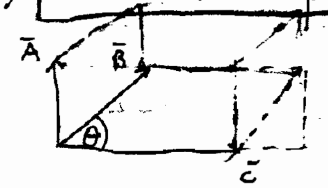
16) $\bar{A}\times\bar{B} = -\bar{B}\times\bar{A}$ שינוי לא-ציקלי:

17) $\bar{A}\times(\bar{B}+\bar{C}) = \bar{A}\times\bar{B}+\bar{A}\times\bar{C}$

$\boxed{*}$ 18) $\left.\begin{aligned}\bar{A} &= A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}\\ \bar{B} &= B_x\hat{x}+B_y\hat{y}+B_z\hat{z}\end{aligned}\right\}$ $\boxed{\bar{A}\times\bar{B} = \begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}}$

19) $\bar{A}\cdot(\bar{B}\cdot\bar{C}) \neq \bar{C}\cdot(\bar{A}\cdot\bar{B})$ בגלל שיקולי כיוון

$\boxed{*}$ 20) $\boxed{\bar{A}\cdot(\bar{B}\times\bar{C}) = V_{\text{מקבילון}}}$

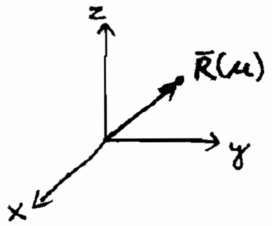


$S_{\text{מקבילית}} = BC\sin\theta = |\bar{B}\times\bar{C}|$

$\bar{A}$ מוסיף את הגובה לשטח.

21) $\bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C}) \neq (\bar{A}\times\bar{B})\times\bar{C}$ של שיקולי כיוון

$\boxed{*}$ 22) $\bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C}) = \bar{B}\cdot(\bar{A}\cdot\bar{C}) - \bar{C}\cdot(\bar{A}\cdot\bar{B})$



<u>וקטור מיקום</u> : $\bar{R}$

וקטור שמחבר בין נקודה במרחב לבין ראשית הצירים.

$\bar{R}(u) = x(u)\hat{x}+y(u)\hat{y}+z(u)\hat{z}$

<u>גזירת וקטורים</u>

הנגזרת של וקטור מיקום לפי עקומה נותן את המשיק <u>לעקומה</u>.

$\Rightarrow \frac{d\bar{R}}{du} = \frac{dx(u)}{du}\hat{x}+\frac{dy(u)}{du}\hat{y}+\frac{dz(u)}{du}\hat{z}$

1) $\frac{d}{du}(\bar{A}+\bar{B}) = \frac{d\bar{A}}{du}+\frac{d\bar{B}}{du}$

2) $\frac{d}{du}(\bar{A}\cdot\bar{B}) = \left(\frac{d\bar{A}}{du}\cdot\bar{B}\right)+\left(\frac{d\bar{B}}{du}\cdot\bar{A}\right)$ (הסדר לא חשוב)

3) $\frac{d}{du}(\bar{A}\times\bar{B}) = \left(\frac{d\bar{A}}{du}\times\bar{B}\right)+\left(\bar{A}\times\frac{d\bar{B}}{du}\right)$ (הסדר כן חשוב)

4) $\frac{d}{du}(f\cdot\bar{A}) = \frac{df}{du}\bar{A}+f\frac{d\bar{A}}{du}$

אור גבאור © <u>וקטור יחידה</u>

וקטור שמסומן בכובע ($\hat{N}$) ומסמן שגודל הוקטור בערך מוחלט הוא 1. כדי לקבל וקטור יחידה "מנרמלים" וקטור: מחלקים אותו בערך המוחלט של עצמו: $\hat{N} = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|}$

הנוסחאות מתייחסות לתנועה לאורך מסלול כלשהו c, כאשר המשוואות שמתארות את השדה הוקטורי לאורך המסלול ניתנות בצורה פרמטרית.

לערכים קטנים של $\Rightarrow ds = |d\vec{R}| = \left|\frac{d\vec{R}}{du}\right| \cdot du$

1) $\boxed{\hat{T} = \frac{d\vec{R}}{ds} = \frac{d\vec{R}/du}{|d\vec{R}/du|}}$

$\hat{T}$ - וקטור יחידה משיק לעקומה.

2) $\boxed{\frac{d\hat{T}}{ds} = \varkappa \hat{N}, \ \rho = \frac{1}{\varkappa}}$ $\boxed{\varkappa = \left|\frac{\partial \hat{T}}{\partial s}\right|}$

$\hat{N}$ - וקטור נורמל, מאונך לעקומה.

$\frac{d\hat{T}}{ds} = \frac{d\hat{T}/du}{ds/du} = \frac{d\hat{T}/du}{|d\vec{R}/du|}$

$\varkappa$ - מקדם עקמומיות של העקומה.

ρ - רדיוס עקמומיות.

3) $\boxed{\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}}$

$\hat{B}$ - וקטור בי-נורמל (וקטור פיתול)

4) $\boxed{\frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau \hat{N}, \ \sigma = \frac{1}{\tau}}$

τ - מקדם פיתול של העקומה.

σ - רדיוס פיתול.

5) $\boxed{\frac{d\hat{N}}{ds} = \tau \hat{B} - \varkappa \hat{T}}$

*6) $\boxed{\varkappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}}$

{הסימון $\dot{x}$ מציין נגזרת ראשונה של x, וכן הלאה}

*7) $\boxed{\tau = \frac{1}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} \cdot \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}$

האופרטור $\vec{\nabla}$ (נבלה/דל)

$$\Rightarrow \nabla := \frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$$

1) gradient

$$\Rightarrow \boxed{grad\,\Psi = \vec{\nabla} \cdot \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\hat{z}}$$

הגרדיאנט מאונך למשטח בנקודה בה בודקים אותו.

הגרדיאנט מצביע על כיוון ההשתנות המהירה ביותר של הפונקציה. כלומר, הכוון של וקטור הגרדיאנט הוא הדרך הקצרה ביותר בין שתי נקודות במשטח ("מים יזרמו לפי גרדיאנט").

שימושים: א) מציאת נורמל בנקודה P_0:

$$\Rightarrow \boxed{\hat{N}_{P_0} = \frac{(\vec{\nabla}\Psi)_{P_0}}{|(\vec{\nabla}\Psi)_{P_0}|}}$$

ב) מציאת משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P_0:

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{r} = (x,y,z) - P_0 \\ \hat{N} \cdot \vec{r} = 0 \end{array}}$$

ג) נגזרת כיוונית (הטלת grad לכיוון מסוים):

$$\Rightarrow \boxed{(\vec{\nabla}\Psi)_{P_0} \cdot \hat{a}}$$

אבי גבור ©

2) <u>divergent</u>

$$\Rightarrow \boxed{div\,\bar{A} = \bar{\nabla}\cdot\bar{A}(R) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

3) <u>curl\rotor</u>

$$\Rightarrow \boxed{rot\,\bar{A} = curl\,\bar{A} = \bar{\nabla}\times\bar{A}(R) = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}}$$

4) <u>אופרטור Laplace</u>

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = \bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\varphi) = \bar{\nabla}^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}}.$$

- <u>תכונות $\bar{\nabla}$</u>

1) $\bar{\nabla}(\varphi+\psi) = \bar{\nabla}\varphi + \bar{\nabla}\psi$

2) $\bar{\nabla}(\bar{A}+\bar{B}) = \bar{\nabla}\bar{A} + \bar{\nabla}\bar{B}$

3) $\bar{\nabla}\times(\bar{A}+\bar{B}) = \bar{\nabla}\times\bar{A} + \bar{\nabla}\times\bar{B}$

4) $\bar{\nabla}\cdot(\varphi\cdot\bar{A}) = (\bar{\nabla}\varphi)\cdot\bar{A} + \varphi(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}) = (grad\,\varphi)\bar{A} + \varphi(div\bar{A}) =$ סקלר

5) $\bar{\nabla}\times(\varphi\cdot\bar{A}) = (\bar{\nabla}\varphi)\times\bar{A} + \varphi(\bar{\nabla}\times\bar{A})$

6) $\bar{\nabla}(\bar{A}\times\bar{B}) = \bar{B}(\bar{\nabla}\times\bar{A}) - \bar{A}(\bar{\nabla}\times\bar{B})$

7) $\bar{\nabla}\times(\bar{A}\times\bar{B}) = (\bar{\nabla}\bar{B})\cdot\bar{A} - (\bar{\nabla}\bar{A})\cdot\bar{B} + (\bar{B}\bar{\nabla})\bar{A} - (\bar{A}\bar{\nabla})\bar{B}$

8) $\bar{\nabla}(\bar{A}\cdot\bar{B}) = (\bar{B}\bar{\nabla})\bar{A} + (\bar{A}\bar{\nabla})\bar{B} + \bar{B}\times(\bar{\nabla}\times\bar{A}) + \bar{A}\times(\bar{\nabla}\times\bar{B})$

9) $\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\varphi) = (\bar{\nabla}\times\bar{\nabla})\varphi = 0$

10) $\bar{\nabla}(\bar{\nabla}\times\bar{A}) = 0$ $\{\bar{\nabla}\perp(\bar{\nabla}\times\bar{A})\}$

11) $\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\times\bar{A}) = \bar{\nabla}(\bar{\nabla}\bar{A}) - \bar{\nabla}^2\bar{A}$

- <u>שדה משמר</u>

משמר בתנאי שדה וקטורי שמקיים: $\boxed{\bar{\nabla}\times\bar{F} = 0}$.

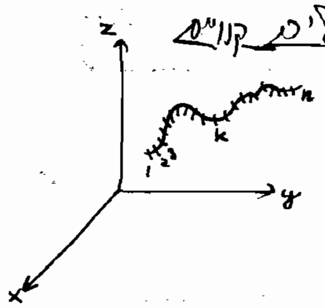
שדה וקטורי שנוצר משדה סקלרי תמיד משמר: $\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\varphi) = (\bar{\nabla}\times\bar{\nabla})\varphi = 0$.

שדה משמר הוא תוצר של שדה סקלרי: $\boxed{\bar{F} = \nabla\phi}$. בשדות אלו ניתן לבדוק <u>עבודה</u>

בלי להשתמש באינטגרלים:

$$\boxed{W = \int_{P_1}^{P_2}\bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_{P_1}^{P_2}(\nabla\phi)d\bar{r} = \phi(P_2) - \phi(P_1)}$$

אינטגרלים קוויים



$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b \bar{A}(\bar{R})\,ds = \lim_{\substack{\Delta s\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \bar{A}(\bar{R}_k)\,\Delta s = \oint_c \bar{A}(\bar{R})\,d\bar{R}}$$

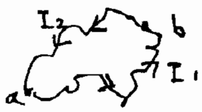
צעדים לחישוב אינטגרל קווי

1) להציג את $\bar{A}$ לפי $\bar{R}$ ($\bar{A}(\bar{R}(u))$).
2) לחשב $d\bar{R} = \frac{d\bar{R}}{du}\cdot du$.
3) להכפיל $\bar{A}(\bar{R}(u))\cdot\frac{d\bar{R}}{du}$.
4) לחשב את האינטגרל לפי du:

$$\boxed{\oint_c \bar{A}(\bar{R})\,d\bar{R} = \int_{u_1}^{u_2}\left[\bar{A}(\bar{R}(u))\cdot\frac{d\bar{R}}{du}\right]\cdot du}$$

הערות

1) אינטגרל קווי על מסלול סגור תמיד יהיה אפס, ללא תלות בצורת המסלול.



2) במקרה כזה: $I_1+I_2=0 \Rightarrow I_1=-I_2$.
הסימן שלילי כיוון שהוקטורים מנוגדים.

אינטגרלים כפולים

מיועדים לחישוב השטח הוקטורי או של מעטפת של שטח, או של הנפח שלו.

1) אינטגרלים של שדות וקטוריים על מעטפת

$$\Rightarrow I = \iint_S \bar{A}\cdot\hat{n}\cdot ds \Leftarrow$$

צעדים לפתרון

1) השיטה היא להטיל את הצורה על אחד המישורים (x-y-z) כדי לקבל אינטגרל סטנדרטי.
הטלה על מישור x-y:

$$ds = \frac{dx\,dy}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{ds = \frac{dx\,dy}{|\hat{n}\cdot\hat{z}|}}$$

2) את $\hat{n}$ מוצאים דרך משוואת המשטח.

$\Psi =$ משוואת משטח

$$\hat{n} = \frac{\nabla\Psi}{|\nabla\Psi|}$$

3) מחשבים $\bar{A}\cdot\hat{n}$.
4) מחשבים $|\hat{n}\cdot\hat{z}|$.
5) מחשבים את האינטגרל:

$$\boxed{\iint_S \bar{A}\hat{n}\,ds = \iint \frac{\bar{A}\cdot\hat{n}}{|\hat{n}\cdot\hat{z}|}\,dx\,dy}$$

② משפט Gauss (גאוס)

$$\Rightarrow \boxed{\iint_S \bar{A}\hat{n}\,ds = \int_V (\bar{\nabla}\bar{A})\,dv}$$

1) המשפט רלוונטי רק למשטחים סגורים.

② הנורמל $\hat{n}$ תמיד מצביע החוצה מהמשטח הסגור.

③ משפט Stokes

$$\Rightarrow \boxed{\iint_S \bar{A}\hat{n}\,ds = \iint_S (\bar{\nabla}\times\bar{B})\hat{n}\,ds = \oint_C \bar{B}\,d\bar{R}}$$

1) המשפט רלוונטי רק למשטחים פתוחים.

② להקפיד על כיוון אינטגרציה חיובי (הצורה משמאל לתנועה).

4) משפט Green

$$\Rightarrow \boxed{\oint_C [M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy] = \iint_S \left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right] dx\,dy}$$

אפשר להשתמש במשפט גרין כדי למצוא את השטח של משטחים שנתונים בצורה פרמטרית (אליפסות, מעגלים, ציקלואידים וחיות אחרות)..

$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{2}\oint M\,dx + N\,dy}$$

⑤ זהות Green ראשונה

$$\Rightarrow \iiint_V [\varphi\nabla^2\psi + \nabla\varphi\cdot\nabla\psi]\,dv = \oiint (\varphi\nabla\psi)\,d\bar{s}$$

⑥ זהות Green שניה

$$\Rightarrow \iiint_V [\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi]\,dv = \oiint (\varphi\nabla\psi - \psi\nabla\varphi)\,d\bar{s}$$

⑦ משפט נוסף ראשון

$$\Rightarrow \iiint_V (\nabla\times\bar{B})\,dv = \oiint d\bar{s}\times\bar{B}$$

⑧ משפט נוסף שני

$$\Rightarrow \oint_C \varphi\,d\bar{l} = \iint_S d\bar{s}\times\nabla\varphi$$

[illegible] ④

חילוף מערכות קואורדינטות

$\Rightarrow f(x,y,\cancel{z}) \longrightarrow f(u_1,u_2,u_3)$

צריך להבדיל בין שני סוגים עיקריים של מערכות צירים:

אורתוגונליות: שלישיית הצירים תמיד מאונכים.

לא אורתוגונליות: הזוויות בין הצירים משתנות.

בקורס אנחנו נעסוק רק עם צירים אורתוגונליים, זה פחות כאב ראש.

נגדיר שלושה משתנים חדשים ואיתם נעבוד:

$$\hat{e}_k = \frac{\partial \bar{r}/\partial u_k}{|\partial \bar{r}/\partial u_k|} \quad , \quad \hat{E}_k = \frac{\nabla u_k(x,y,z)}{|\nabla u_k(x,y,z)|} \qquad \{\text{במערכת אורתוגונלית } \hat{e}_k \parallel \hat{E}_k\}$$

$$h_k = \left|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u_k}\right|$$

$$\Rightarrow \bar{A} = A_1\hat{x} + A_2\hat{y} + A_3\hat{z} \longrightarrow A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3$$

$$\Rightarrow d\bar{r}_k = h_k \hat{e}_k$$

$$\Rightarrow \boxed{dv = |d\bar{r}_1 \cdot (d\bar{r}_2 \times d\bar{r}_3)| = h_1 h_2 h_3\, du_1 du_2 du_3}$$

1) שינוי ∇: grad

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\nabla}\psi = \frac{\hat{e}_1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1} + \frac{\hat{e}_2}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2} + \frac{\hat{e}_3}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}} = \boxed{\sum_{k=1}^{3}\frac{\hat{e}_k}{h_k}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u_k}}$$

2) שינוי ∇: div

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\nabla}\bar{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_2h_1h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3}(A_3h_1h_2)\right]}$$

3) שינוי ∇: curl

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\nabla}\times\bar{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{e}_1 & h_2\hat{e}_2 & h_3\hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}}$$

4) שינוי ∇: לפלסיאן

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\nabla}^2\psi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right)\right]}$$

קואורדינטות גליליות

$\Rightarrow x = \rho\cos\varphi\ ,\ y = \rho\sin\varphi\ ,\ z = z$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \hat{e}_\rho = \cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y}\ , & h_\rho = 1\ , & \\ \hat{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}\ , & h_\varphi = \rho\ , & J = \rho \\ \hat{e}_z = \hat{z}\ , & h_z = 1\ , & \end{array}}$$

קואורדינטות כדוריות

$\Rightarrow x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \hat{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}\ , & h_r = 1\ , & \\ \hat{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z}\ , & h_\theta = r\ , & J = r^2\sin\theta \\ \hat{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}\ , & h_\varphi = r\sin\theta\ , & \end{array}}$$

יסודות

בדרך-כלל מתעסקים עם משוואות, או יצורים שנראים כמו המשוואה הבאה: $ax=b$

למערכת הכי פשוטה הזו יש שלוש אפשרויות:

א) $a\neq 0 \Rightarrow x=\frac{b}{a}$ פתרון יחיד

ב) $a=0, b\neq 0 \Rightarrow$ אין פתרון

ג) $a=0, b=0 \Rightarrow$ כל x הוא פתרון

בדרך-כלל עובדים עם סטים של משוואות: m משוואות ב-n נעלמים:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n &= b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n &= b_2\\ \vdots \qquad\qquad & \quad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

כדי לפתור את המערכת הזאת משתמשים בשיטת אלימינציה מדורגת:

1) כל משוואה צריכה להכיל נעלם אחד פחות מהמשוואה מעליה. כלומר, אחרי המשוואה הראשונה נפטרים מכל ה-x_1, אחרי השניה מכל ה-x_2 וכו'.

2) מביאים את המערכת למצב מדורג, כך שבמשוואה ה-m יש רק נעלם אחד.

3) פותרים אחורה, כאשר כל פעם מציבים את הנעלמים שכבר נפתרו.

4) אם בדרך נוצרת משוואה מהסוג: $0x_1+0x_2+\dots+0x_n=k$ אז אין פתרון למערכת

5) אם בדרך מקבלים משוואה מהסוג: $0x_1+0x_2+\dots+0x_n=0$, או משוואה שהיא כפולה של משוואה אחרת - אפשר למחוק אותה.

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\dots+a_{1n}x_n &= b_1\\ a_{2j_2}x_{j_2}+a_{2j_2+1}x_{j_2+1}+\dots+a_{2n}x_n &= b_2\\ \vdots \qquad\qquad & \\ a_{rj_r}x_{j_r}+a_{rj_r+1}x_{j_r+1}+\dots+a_{rn}x_n &= b_r \end{aligned}\right\}$$

מערכת מדורגת, כאשר $r\le n$.

מטריצות

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n &= b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n &= b_2\\ \vdots \qquad\qquad & \quad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \overset{\bar{A}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$

$\bar{A}$ הנו מטריצת המקדמים של מערכת המשוואות. יש לה m שורות ו-n עמודות, ולכן נקראת מטריצה של $m\times n$.

שיטת Gauss-Jordan

1) מחלקים את השורה הראשונה ב- a_{11} כדי לקבל אחד.

2) מאפסים את כל האיברים $a_{21},\dots,a_{m1}$.

3) אם $a_{22}\neq 0$ מחלקים בו כדי לקבל אחד.

4) מאפסים את כל האיברים $a_{32},\dots,a_{m2}$.

5) ממשיכים עד שהמשולש התחתון מאופס כולו.

6) חוזרים על הפעולה הפוך, כדי לאפס את המשולש העליון.

*) אם מקבלים שורה של אפסים - אפשר לבחור כל פרמטר עבור הנעלם.

*) אם מקבלים שורה של אפסים ששווה לקבוע - אין פתרון.

$\Leftarrow$ התוצאה תהיה מטריצה קנונית וקל מאוד למצוא את הערכים של הנעלמים השונים.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

פעולות בסיסיות והגדרות נוספות

1) **חיבור מטריצות**

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}}$$

2) **כפל מטריצה בסקלר**: פשוט מכפילים כל איבר במטריצה באותו סקלר.

3) **כפל מטריצות**

מוגדר רק כאשר מספר העמודות של A שווה למספר השורות של B.

מכפילים שורה בעמודה כדי לקבל את האיבר המתאים במטריצת התשובה:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}, & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}, & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}, & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}, & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}, & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}, & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}}$$

אור שגיא ©

4) <u>חוקים פשוטים</u>:

אסוציאטיביות: א) $(AB)C = A(BC)$

דיסטריבוטיביות שמאלית: ב) $A(B+C) = AB+AC$

ימנית: ג) $(B+C)A = BA+CA$

ד) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

5) <u>מטריצה משוחלפת</u> (transpose)

המטריצה $\bar{\bar{A}}^T$ מתקבלת מסידור העמודות של המטריצה $\bar{\bar{A}}$ בשורות.

ואז, אם $\bar{\bar{A}}$ מטריצת $m\times n$,

אז $\bar{\bar{A}}^T$ מטריצת $n\times m$.

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}$$

<u>תכונות</u>:

א) $(A+B)^T = A^T + B^T$

ב) $(A^T)^T = A$

ג) $(kA)^T = kA^T$

ד) $(AB)^T = B^TA^T$ שים לב לסדר ההפוך של המכפלה:

ה) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

6) <u>אלכסון ועקבה</u> (trace)

במטריצה ריבועית $n\times n$ האלכסון מורכב מהאיברים $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ והעקבה של המטריצה הינו סכומם:

$$\boxed{Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

7) <u>מטריצת יחידה</u> - I

מטריצה ריבועית שהאלכסון מורכב רק מאחדות.

8) <u>הפיכת מטריצות</u>

מטריצה A הפיכה אם קיימת מטריצה A^{-1} כך ש: $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I$.

מציאת A^{-1}:

$$\boxed{[A \mid I] \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} [I \mid A^{-1}]}$$

9) <u>מטריצה סימטרית</u>: $A^T = A$

10) <u>מטריצה אנטי-סימטרית</u>: $A^T = -A$, צריך לשים לב שהאלכסון מורכב רק מאפסים.

11) <u>מטריצה אורתוגונלית</u>: $A\cdot A^T = A^T\cdot A = I$

$$A^T\cdot A = \begin{pmatrix} \cdots & \bar{u}_1 & \cdots \\ \cdots & \bar{u}_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \bar{u}_n & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \cdots & \bar{u}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^T\cdot u_1 & \cdots & u_1^T\cdot u_n \\ & \ddots & \vdots \\ & & u_n^T\cdot u_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{matrix} \forall(i\neq j)\,[u_i^T\cdot u_j = 0] \\ \forall(i=j)\,[u_i^T\cdot u_j = 1] \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I$$

מרחבים

תכונות של מרחב לינארי

1) קיים רכיב אפס ($\bar{0}$).
2) אם $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ כלולים במרחב, אזי גם ($\bar{a}_1+\bar{a}_2$) כלולים בו.
3) כל מכפלה מסוג $k\bar{a}$ גם כלולה במרחב.

תת-מרחבים

W יהיה תת-מרחב של מרחב וקטורי V אם ורק אם:

1) $0\in W$.
2) W סגור תחת חיבור וקטורים: $\forall(\bar{u},\bar{v}\in W): (\bar{u}+\bar{v})\in W$
3) W סגור תחת כפל בסקלר: $\forall(\bar{u}\in W, k\in\mathbb{R}): k\bar{u}\in W$

פרישת מרחבים

מרחב V נפרש ע"י קומבינציה לינארית של וקטורים הכלולים בו.

כלומר, אוסף כל תת-קבוצה S של V: $\boxed{span(S) = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_m\bar{v}_m}$

בסיס

הבסיס של V מוגדר בתור אוסף הוקטורים $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m$, כאשר:

1) $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$ בת"ל לינארית.
2) $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$ פורשים את V.

בדיקת אי-תלות

1) מסדרים את הוקטורים בשורות במטריצה.
2) מדרגים את המטריצה.
3) אם מתקבלות שורות זהות או שורות אפסים - קיימת תלות לינארית.

מציאת בסיס

1) מסדרים את הוקטורים בשורות במטריצה.
2) מדרגים את המטריצה.
3) השורות השונות מאפס הן וקטורי הבסיס.

בדיקת אי-תלות בין מטריצות

1) מסדרים את איברי המטריצות בשורות במטריצה חדשה.

2) מדרגים את המטריצה החדשה.

3) אם יש שורות אפסים - המטריצות תלויות ליניארית.

טרנספורמציות בין בסיסים

נסתכל על בסיס $S=\{\bar u_1,\bar u_2,\dots,\bar u_n\}$ במרחב V. נרצה לעבור ממנו לבסיס $S'=\{\bar v_1,\bar v_2,\dots,\bar v_n\}$. כיוון ששניהם בסיסים במרחב V, ניתן לומר:

$$\bar v_1 = c_{11}\bar u_1 + c_{12}\bar u_2 + \dots + c_{1n}\bar u_n$$
$$\bar v_2 = c_{21}\bar u_1 + c_{22}\bar u_2 + \dots + c_{2n}\bar u_n$$
$$\dots$$
$$\bar v_n = c_{n1}\bar u_1 + c_{n2}\bar u_2 + \dots + c_{nn}\bar u_n$$

כדי לעבור בין הבסיסים נשתמש במטריצת טרנספורמציה שבנויה מעמודות המקדמים:

$$\boxed{P=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \cdots c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} \cdots c_{n2} \\ \vdots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} \cdots c_{nn}\end{pmatrix}} \Rightarrow \quad P\cdot[\bar u]_S=[V]_{S'}$$

מיפויים ליניאריים

נסתכל על המשוואה הפשוטה: $\bar{\bar A}\cdot\bar x=\bar y$. היא מקבילה למשוואה: $y=ax$.

במקרה זה אומרים שהמטריצה A ממפה את $\bar y$ לפי $\bar x$. $\bar x$ הוא התחום, או ה-domain של $\bar y$. נגדיר:

1) תמונה (image): כל ה"תוצאות" האפשריות של הטרנספורמציה.

2) גרעין (kernel): כל הוקטורים $\bar x$, עבורם $T(\bar x)=0$.

- תכונות בסיסיות

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ T(\bar x+\bar y)=T(\bar x)+T(\bar y) \\ 2)\ T(k\bar x)=kT(\bar x)\end{array}}$$

- מימדים ודרגות

המימד של וקטור או מרחב, נקבע לפי מס' הרכיבים שלו. אם $V=\{\bar u_1,\bar u_2,\dots,\bar u_n\}$ אז V הוא מרחב n-מימדי ונסמן $\dim(V)=n$.

אור סטולר © במיפויים ליניאריים בהם משתמשים במטריצה $m\times n$ צריך לשים לב שממרחב n-מימדי אנחנו עוברים למרחב m-מימדי: $\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$.

הדרגה של מטריצה מוגדרת ע"י מס' השורות שלה שאיבר הציר האלכסוני שלהן אינו אפס.

אם $n=\dim(\bar{A})$, אז: $rank(\bar{A}) \le n$.

למספר השורות שבעלות אפסים באיברי הציר קוראים $nullity(\bar{A})$.

אם נסתכל על מטריצה ריבועית $n \times n$ נוכל לומר:

1) $\dim(\ker(\bar{A})) + \dim(Im(\bar{A})) = \dim(\bar{A}) = n$

2) $\dim(im(\bar{A})) = rank(\bar{A})$

3) $\dim(\ker(\bar{A})) = nullity(\bar{A})$

- I) $nullity(\bar{A}) = 0 \Rightarrow$ ניתן להפוך את המטריצה
- II) $nullity(\bar{A}) = 1 \Rightarrow$ אי-אפשר להפוך את המטריצה, אבל לא כל האלמנטים בה שווים לאפס.
- III) $nullity(\bar{A}) = n \Rightarrow$ יש רק אפסים במטריצה

4) $nullity(\bar{A}) = n - rank(\bar{A})$

<u>בסיס וקואורדינטות בטרנספורמציות</u>

כל וקטור $\bar{V}$ יחסית לבסיס $\{e_k\}$, אפשר לתאר כחיבור לינארי של וקטורי הבסיס השונים.

המקדמים c_k בפיתוח $\bar{V} = \sum_{k=1}^{n} c_k \bar{e}_k$ נקראים <u>קואורדינטות</u>.

הצגת טרנספורמציה יחסית לבסיס $\{e_k\}$ היא מטריצה שעמודותיה הן הקואורדינטות של $T(e_k)$.

כלומר, נאמר שמסתכלים על בסיס S שבו מטריצת מיפוי T. T יורכב מעמודות המקדמים

ויסומן $[T]_S$:

פריסות של וקטורים $T(u_n)$:

$$\left.\begin{aligned}
T(u_1) &= c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + \dots + c_{1n}u_n \\
T(u_2) &= c_{21}u_1 + c_{22}u_2 + \dots + c_{2n}u_n \\
&\vdots \\
T(u_n) &= c_{n1}u_1 + c_{n2}u_2 + \dots + c_{nn}u_n
\end{aligned}\right\}$$

$$\Downarrow$$

המטריצה של T בבסיס S:

$$\boxed{[T]_S = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}}$$

<u>מציאת $[T]_S$</u>

1) מחשבים קואורדינטות של וקטור שרירותי $\bar{V} = (a,b,k)$ יחסית לבסיס $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$:

מוצאים נוסחאות עבור a,b,k. $\Rightarrow (a,b,k) = c_1\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2 + c_3\bar{u}_3$

2) בונים מטריצה מצבם: <u>עמודות</u>

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & k \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{c|c} \cancel{\cdots \bar{u}_1 \cdots} & a \\ \cancel{\cdots \bar{u}_2 \cdots} & b \\ \cancel{\cdots u_3 \cdots} & k \end{array}\right]$$

ומדרגים אותה. השורות שמתקבלות מצד ימין הן המשוואות שמתארות את הקואורדינטות c_1, c_2, c_3.

3) מפעילים את הטרנספורמציה T על כל אחד מוקטורי הבסיס ב-S.

4) את הערכים המתקבלים מציבים במשוואות שמצאנו בסעיף 2 וכך מקבלים את הקואורדינטות עבור הקשר הליניארי בין וקטורי הבסיס לבין הוקטורים המתקבלים בטרנספורמציה: $T(u_1) = (x,y,z) = (a,b,c) = c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + c_{13}u_3$

5) את הקואורדינטות החדשות שמצאנו מסדרים כעמודות במטריצה $[T]_S$.

<u>מטריצות מעבר בין בסיסים</u>

יהי $S=\{u_1,\dots,u_n\}$ בסיס של V ויהי $S'=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס אחר.

כיוון ששניהם בסיסים לאותו מרחב, ניתן לרשום את וקטורי הבסיס S' בחיבור ליניארי של וקטורי הבסיס S: $v_k = c_{k1}u_1 + c_{k2}u_2 + \dots + c_{kn}u_n$

מטריצת המעבר בין הבסיסים, שתסומן ב-P או ב-$[I]_{S'}^{S}$, תורכב מעמודות המקדמים השונים.

<u>הצגת מטריצת מיפוי בבסיסים שונים</u>

תהי P מטריצת המעבר מבסיס S לבסיס S' במרחב וקטורי V. אזי, עבור כל טרנספורמציה (מטריצת מיפוי) T, מתקיים:

$$\boxed{[T]_{S'} = P^{-1}[T]_S P}$$

או במלים אחרות, אם $\bar{\bar{A}}$ היא המטריצה שמייצגת את T בבסיס S ו-$\bar{\bar{B}}$ - בבסיס S',

אז מתקבל היחס הבא:

$$\boxed{\bar{\bar{B}} = \bar{\bar{P}}^{-1}\cdot\bar{\bar{A}}\cdot\bar{\bar{P}}}$$

ואז אומרים שהמטריצות $\bar{\bar{A}}$ ו-$\bar{\bar{B}}$ <u>דומות</u>.

<u>תכונות דמיון</u>-

במקרה ששתי מטריצות דומות, יש פונקציות מסוימות שהפעלתן על המטריצות שקולה להפעלתן על הטרנספורמציה עצמה.

1) <u>דטרמיננטה</u>: $\det(T)=\det(A)=\det(B)$

2) <u>עקבה</u>: $tr(T)=tr(A)=tr(B)$

3) <u>פולינום אופייני</u> (master equation): $\Delta_T(t)=\Delta_A(t)=\Delta_B(t)$.

4) $\bar{\bar{A}}$ דומה ל-$\bar{\bar{A}}$ אם $\bar{\bar{S}}=I$.

5) אם $\bar{\bar{A}}$ דומה ל-$\bar{\bar{B}}$, אז $\bar{\bar{B}}$ דומה ל-$\bar{\bar{A}}$.

6) אם $\bar{\bar{A}}$ דומה ל-$\bar{\bar{B}}$, ו-$\bar{\bar{B}}$ דומה ל-$\bar{\bar{C}}$, אז $\bar{\bar{A}}$ דומה ל-$\bar{\bar{C}}$.

מיפויים איזומורפיים

מיפוי ליניארי נקרא איזומורפי אם הוא חד-חד-ערכי ועל (דו-ערכי). כלומר, לכל נקודה במרחב V מתאים המיפוי נקודה במרחב W, והפעולה היא דו-ערכית. זה גורר מס' תכונות:

1) $\ker(T) = 0 \Rightarrow$ מטריצת המיפוי חייבת להיות הופכית

2) $im(T) = W \quad \{T: V \longrightarrow W\}$

3) $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\} \in V$

$\Rightarrow \{T(f_1), T(f_2), \cdots, T(f_n)\} \in W$

אם הוקטורים f_n היו בת"ל ויוצרים בסיס של V, הם היו ממופים לבסיס של W.

כדי לבדוק אם מיפוי הוא איזומורפי בודקים את גרעין המיפוי.

מכפלה פנימית: Inner Product Spaces

מכפלה פנימית של שני "וקטורים" (יכול להיות כל דבר) במרחב וקטורי V (מעל $\mathbb{R}$)

מוגדר אם מתקיימים התנאים הבאים:

1) ליניאריות: $\langle au_1 + bu_2, v\rangle = a\langle u_1, v\rangle + b\langle u_2, v\rangle$

2) סימטריות: $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

3) חיוביות: $u \neq 0 \Rightarrow \langle u, u\rangle \geq 0$

מקיימות במרחב

נורמה של "וקטור": $\Rightarrow \boxed{\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}}$

"וקטור" מנורמל (באורך יחידה): $\Rightarrow \boxed{\hat{u} = \frac{u}{\|u\|}}$

מרחק בין שני "וקטורים": $\Rightarrow \boxed{d(u,v) = \sqrt{\|u-v\|}}$

אי-שוויון Cauchy-Schwartz

עבור כל זוג וקטורים u,v במרחב מכפלה פנימית V מתקיים: $\boxed{|\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|}$

ומכאן ניתן להגיע לתוצאות הבאות:

1) הגדרת זווית בין וקטורים (שאינם יחידה): $\boxed{\cos(\theta) = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}}$

2) אי-שוויון המשולש: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

3) ניתן להגדיר מכפלה פנימית במרחב הילברט (מרחב אינסופי).

אורתוגונליות ומשלים אורתוגונלי

שני וקטורים v,u אורתוגונליים אם מתקיים: $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle = 0$

שני הוקטורים אורתונורמליים אם בנוסף לכך מתקיים: $\langle u,u\rangle = \langle v,v\rangle = 1$

או, באופן מקוצר בעזרת הדלתא של קרונקר:

$$\boxed{\langle u_i,u_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}}$$

משלים אורתוגונלי: וקטור או אוסף של וקטורים שאורתוגונליים לכל אחד מהוקטורים בבסיס מסוים W:

$$W^{\perp} = (s,\ s\in V \mid \langle s,w\rangle = 0\ \forall w\in W)$$

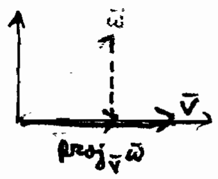
ובמקרה זה מקבלים את השוויון:

$$\boxed{\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^{\perp})}$$

היטלים

אם v ו-w הם שני וקטורים, אז ההטלה של w על v מוגדרת כ:

$$\boxed{proj_{\bar{v}}\,\bar{w} = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle v,v\rangle}\bar{v}}$$



והחלק $\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|^2}$ קרוי מקדם Fourier.

תהליך Gram-Schmidt

זהו תהליך שמהווה 'טכנס' בין בסיס כלשהו $\{v_i\}$ לא אורתוגונלי לבסיס $\{w_i\}$ אורתוגונלי.

1) בוחרים את הוקטור הראשון בבסיס החדש: $w_1 = v_1$.

2) בונים את הוקטור השני לפי הקומבינציה: $w_2 = v_2 - c_{21} w_1$

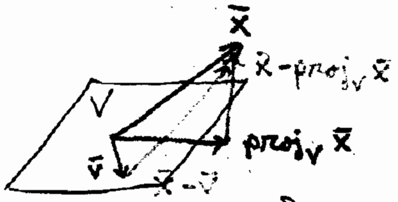
כאשר c_{21} הוא מקדם פורייה: $c_{21} = \frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle}$

3) באופן דומה בונים את הוקטור השלישי: $w_3 = v_3 - c_{31}w_1 - c_{32}w_2$

4) ממשיכים בתהליך, לפי הנוסחה הכללית:

$$\boxed{w_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} w_j \qquad c_{ij} = \frac{\langle v_i,w_j\rangle}{\langle w_j,w_j\rangle}}$$

אור דסלר ©



1) מציאת קירוב לוקטור שלא מופיע במרחב שלנו:

$$\boxed{\forall(\bar v\in V): \|\bar x - proj_V \bar x\| \le \|\bar x - \bar v\|}$$

ההיטל נותן את הקירוב הכי טוב לוקטור במובן שהמרחק ביניהם מינימלי.

2) מציאת קירוב לפתרון במקרה של סט משוואות עם יותר מדי נעלמים:

במצב של משוואה מסוג $\bar A\cdot\bar y=\bar b$, כשיש יותר נעלמים ממשוואות - אין פיתרון.

גם פה מחפשים $\bar y^*$ קירוב לפתרון.

בהתבסס על הקשר $\|\bar A\cdot\bar y^*-\bar b\|\le\|\bar A\bar y-\bar b\|$ ועל כך שאם היה פיתרון אז $\|\bar A\bar y^*-\bar b\|=0$

מגיעים לנוסחה הבאה עבור הקירוב: $\boxed{(\bar A^T\cdot\bar A)\cdot\bar y^* = \bar A^T\cdot\bar b}$

VI

דטרמיננטות

תכונות בסיסיות

1) $\det\begin{pmatrix}\lambda a & b\\ \lambda c & d\end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

2) $\det\begin{pmatrix}a+f & b\\ c+g & d\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}f & b\\ g & d\end{pmatrix}$

לינאריות

3) $\det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}b & a\\ d & c\end{pmatrix}$ אנטי-סימטריות

4) $\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \det(I) = 1$ מטריצת יחידה=1

פעולות במטריצות

1) $\det\begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \bar a & \bar a\\ \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix} = 0$ הדטרמיננטה של מטריצה שכוללת שורות/עמודות תלויות:
(תלויות: זהות או אפסים)

2) $\det(\bar A^T) = \det(\bar A)$

3) $\det\begin{pmatrix}a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ 0 & \ddots & a_{nn}\end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$

4) $\det(\bar A\cdot\bar B) = \det(\bar A)\cdot\det(\bar B)$ במטריצות ריבועיות:

5) $\bar A^{-1}\cdot\bar A = \bar I$

$\Rightarrow \det(\bar A^{-1}\cdot\bar A) = [\det(\bar A)]^2 = \det(\bar I) = 1$

$\boxed{*}$ 6) $\det(\bar A)\neq 0 \Rightarrow$ המטריצה $\bar A$ הפיכה

חישוב דטרמיננטות לפי Gauss-Jordan

1) בוחרים שורה שהאיבר הראשון שלה שונה מאפס (ועדיף שווה לאחד).

2) מבצעים דירוג על כל השורות מתחת כדי לאפס את האיברים באותה עמודה.

- פעולות ליניאריות בין השורות לא משפיעות על ערך הדטרמיננטה.

3) מחליפים שורות/עמודות לפי הצורך. כל החלפה משנה את סימן הדטרמיננטה.

4) אם מחלקים שורה מסוימת בסקלר, אותו סקלר "יוצא החוצה" ויוכפל בערך הדטרמיננטה.

5) כשמגיעים למטריצה יחידה - ערך הדטרמיננטה יהיה $\boxed{(-1)^K \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_\ell \cdot det(\bar{\bar{I}})}$

כאשר K מסמן את מספר ההחלפות ו-ℓ את מס' הסקלרים שהוצאנו החוצה.

שיטת המינורים

בשיטה זו מפרקים דטרמיננטה $n \times n$ לדטרמיננטות יותר ויותר קטנות, עד ל-3×3 או 2×2 איתן קל לעבוד.

1) לוקחים מטריצה $n \times n$ ובוחרים איבר a_{ij}.

2) מוחקים את השורה והעמודה שלו.

3) מקבלים מטריצה $(n-1)\times(n-1)$ שנקראת $\bar{\bar{M}}_{ij}$ (מטריצת מינור).

4) מטריצת המינור מוכפלת בקו-פקטור $(-1)^{i+j}$.

5) הדטרמיננטה של $\bar{\bar{A}}$ היא סכימה של המינורים המסומנים:

$$\boxed{det(\bar{\bar{A}}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(\bar{\bar{M}}_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(\bar{\bar{M}}_{ij})}$$

6) אם צריך, מפרקים את המינור למטריצות קטנות יותר, וכן הלאה.

מציאת מטריצה הפוכה

בעזרת שיטת המינורים אפשר למצוא מטריצות הפוכות.

נגדיר "צמודה קלאסית של $\bar{\bar{A}}$ = $adj\,\bar{\bar{A}}$" בתור מטריצה משוחלפת של מינורים: $\bar{\bar{M}}_{ij}$, כולל הסימן שלהם. את $\bar{\bar{A}}^{-1}$ נקבל לפי הנוסחה הבאה:

$$\boxed{\bar{\bar{A}}^{-1} = \frac{adj(\bar{\bar{A}})}{det(\bar{\bar{A}})} = \frac{(-1)^{i+j}\, det(\bar{\bar{M}}_{ji})}{det(\bar{\bar{A}})}}$$

ניוונים

1) ניוון אלגברי: מס' הפעמים שערך עצמי λ חוזר על עצמו.

2) ניוון גאומטרי: מס' הוקטורים העצמיים שמשוייכים ל-λ מסוים.

דטרמיננטות ונפחים

- דטרמיננטה של מטריצה $n\times n$ היא הנפח של המקבילון המורכב מ-n וקטורי השורה שמרכיבים את המטריצה. אם הדטרמיננטה שווה לאפס, כלומר חלק מהוקטורים תלויים, מבינים שאותם וקטורים לא מרכיבים צורה שאותו מרחב.
- כשמעבירים צורה ממערכת קואורדינטות אחת לשנייה לפי הטרנס' $\bar{\bar{A}}\cdot\hat{e}_n=\vec{v}_n$, היחס בין הנפח/שטח בין שתי המערכות נתון ע"י $det(\bar{\bar{A}})$.

ערכים עצמיים - Eigenvalues

הערכים העצמיים λ של מטריצה ריבועית $\bar{\bar{A}}$ מוגדרים כסקלרים שמקיימים: $\bar{\bar{A}}\cdot v=\lambda v$.
בעזרת הערכים העצמיים אפשר לבנות את הפולינום האופייני של המטריצה, ללכסן אותה ולבנות את מטריצת הלכסון.

- **מציאת ערכים עצמיים** $|\bar{\bar{A}}-\lambda\bar{\bar{I}}|$

1) מחשבים את הפולינום האופייני $\Delta(t)$ של A. $\Delta(t)$ מוגדר בתור הדטרמיננטה $|\cancel{\bar{\bar{A}}-\lambda\bar{\bar{I}}}|$.
כלומר:

$$|\bar{\bar{A}}-\lambda\bar{\bar{I}}|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=\boxed{\lambda^n-\lambda^{n-1}trace(\bar{\bar{A}})+\dots+(-1)^n det(\bar{\bar{A}})}$$

(master equation)

2) משווים את $\Delta(t)$ לאפס ומוצאים את ערכי λ השונים.
3) וקטורים עצמיים: מוצאים את הוקטורים העצמיים ששייכים לכל λ.
א) מחסרים את λ מהאלכסון של $\bar{\bar{A}}$.
ב) פותרים את מערכת המשוואות $\bar{\bar{A}}x=0$. כלומר:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$$

או במילים אחרות: גאוס-ג'ורדן.

- **לכסון מטריצות**

1) אם מספר הוקטורים העצמיים שווה למספר השורות במטריצה - אפשר ללכסן אותה.
2) מלכסנים מטריצה לפי משוואת הדמיון: $\bar{\bar{B}}=\bar{\bar{S}}^{-1}\cdot\bar{\bar{A}}\cdot\bar{\bar{S}}$.
א) המטריצה האלכסונית $\bar{\bar{B}}$ מורכבת מהערכים העצמיים λ באלכסון.
ב) מטריצת הלכסון $\bar{\bar{S}}$ מורכבת מהוקטורים העצמיים שמסודרים בעמודות.

- **שימוש במטריצה אלכסונית:**

בגלל תכונות הדמיון: $\bar{\bar{A}}=\bar{\bar{S}}\cdot\bar{\bar{B}}\cdot\bar{\bar{S}}^{-1}$, ולכן כל פונקציה שמפעילים על $\bar{\bar{A}}$ אפשר להפעיל בצורה פשוטה יותר על $\bar{\bar{B}}$:

$$\boxed{f(\bar{\bar{A}})=f(\bar{\bar{S}}\cdot\bar{\bar{B}}\cdot\bar{\bar{S}}^{-1})=\bar{\bar{S}}\cdot f(\bar{\bar{B}})\cdot\bar{\bar{S}}^{-1}}$$

- לכסון מטריצות סימטריות: $\bar{\bar{A}}^T=\bar{\bar{A}}^*$

אם המטריצה סימטרית, היא תלוכסן בעזרת מטריצה אורתוגונלית ($\bar{\bar{S}}^{-1}=\bar{\bar{S}}^T$), ואז גם המטריצה המלוכסנת תהיה סימטרית.

- כמו כן נובע שכל הוקטורים העצמיים יהיו אורתוגונליים אלה לאלה.
- מטריצות סימטריות תמיד אפשר ללכסן - ואולם לא יהיו להן ערכים עצמיים מרוכבים.

VI דטרמיננטות - תוספות

- משפט Laplace

כדי לחשב דטרמיננטה של מטריצה $A=\{a_{ij}\}$ בגודל $n\times n$ משתמשים:

$$\boxed{\det(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \qquad \text{כאשר } A_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|}$$

דרך נוחה לזכור את סימן המקדם, היא לחשוב על לוח שח-מט, כאשר הסימן השמאלי הוא ⊕.

- חוק Cramer

נתונה מערכת משוואות מסוג: $a_{ij}x_j=d_i$, כאשר $i,j=1,\dots,n$.

1) למערכת קיים פיתרון אם $D\equiv\det(a_{ij})\neq 0$.

2) אם קיים פתרון, אז את המשתנים x_j מוצאים כך:

$$\boxed{x_j=\frac{N_j}{D}\ ,\quad N_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & d_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & & & & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & d_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

כשאנו מחליפים את העמודה ה-j בעמודת ה- d_i

V מכפלה פנימית - תוספת

- הצגה מטריצית של מכפלה פנימית

יהי A מטריצה חיובית לחלוטין ממשית. כלומר, זו מטריצה שאם נלכסן אותה - אחרי הלכסון יהיו חיוביים. אזי הפונקציה $\langle v,u\rangle=u^TAv$ היא מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$.

יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $S=\{u_1,\dots,u_n\}$ בסיס כלשהו של V. המטריצה A נקראת הצגה מטריצית של המכפלה הפנימית של V ביחס לבסיס S:

$$A=\begin{bmatrix} \langle u_1,u_1\rangle & \langle u_1,u_2\rangle & \cdots & \langle u_1,u_n\rangle \\ \langle u_2,u_1\rangle & \langle u_2,u_2\rangle & \cdots & \langle u_2,u_n\rangle \\ \cdots & & & \cdots \\ \langle u_n,u_1\rangle & \langle u_n,u_2\rangle & \cdots & \langle u_n,u_n\rangle \end{bmatrix}$$

או בקיצור:

$$\boxed{A=(a_{ij})\ ,\quad a_{ij}=\langle u_i,u_j\rangle}$$

ממפי"ס 2 - סיכום - טנזורים

כל פעולה שמשמעותה לא משתנה כאשר עושים טרנספורמציה בין מערכות ייחוס נחשבת לטנזור.

טנזור קו-וריאנטי: A_j טנזור בעל אינדקס תחתון: $\boxed{\tilde{A}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} A_\nu}$

טנזור קונטרה-וריאנטי: A^i טנזור בעל אינדקס עליון: $\boxed{\tilde{A}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu}$

- סקלר: מוגדר כטנזור מסדר אפס: $\tilde{A} = A$ אין לו שינוי בעקבות טרנספורמציה.
- וקטור: עבור מערכות בעזרת טנזור סיבוב אורתוגונלית $(R^T = R^{-1})$: $\boxed{\tilde{V}_i = R_{ij} V_j}$
- מטריצה: טנזור מסדר שני, שמקיים: $\boxed{\tilde{A}_{ij} = R_{im} R_{jn} A_{mn}}$
- טנזור מסדר שלישי: $\boxed{\tilde{A}_{ijk} = R_{im} R_{jn} R_{kp} A_{mnp}}$
- הדלתא של קרונקר: זהו בעצם ההצגה הטנזורית של מטריצת יחידה:

$$\boxed{\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}}$$

- טנזור הפרמוטציות:

$$\boxed{e_{ijk} = \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{שינויים זוגיים} \quad i \neq j \neq k \\ -1 & \text{שינויים לא זוגיים} \quad i \neq j \neq k \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}}$$

פעולות בין טנזורים

1) חיבור: כאשר האינדקסים זהים, התוצאה היא טנזור מאותה צורה: $C^j_i + D^j_i = B^j_i$

2) מכפלה חיצונית: האיבר ה-ij הוא מכפלת האיבר $C^i \cdot D^j$:

$C^i \cdot D^j = G^{ij}$

$C^i \cdot D_j = G^i_j$

3) צמצום: כאשר אינדקס עליון ואינדקס תחתון זהים מפעילים עליהם סכימה ומבטלים אותם:
כשמצמצמים, סדר הטנזור החדש הוא $\boxed{n-2}$. $C^{ij}_{mn}\ ,\ m=i \Rightarrow C^{ij}_{in} \rightarrow C^j_n$

4) מכפלה בדלתא: דרך להחליף אינדקסים: $\delta_{im} A_{mn} = A_{in}$

5) העלאה והורדה של אינדקסים: בעזרת מטריקה: $T^{im} g_{mj} = T^i_j$

*) אסור לאינדקס להופיע יותר מפעמיים.

6) מכפלה סקלרית בין וקטורים: $\boxed{\bar{u} \cdot \bar{v} = u_i v_j \delta_{ij} = u^1 v^1 + u^2 v^2 + \ldots + u^n v^n}$

7) מכפלה וקטורית בין וקטורים: $\boxed{\bar{u} \times \bar{v} = \varepsilon_{ijk} u_j v_k}$

8) מכפלת טנזור הפרמוטציות: $\boxed{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}}$

מטריקות

טנזור המטריקה מייצג את השינוי של אורכים בטרנספורמציות: $\boxed{ds^2 = g_{pq}\, dx^p dx^q}$

בקואורדינטות קרטזיות, למשל, נקבל מטריקת יחידה: $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$

בהמשך נלך נבין לחשב את המטריקה של מערכת $\Rightarrow g_{pq} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

בקואורדינטות מסוימות, צריך להשתמש בנוסחה הכללית, אבל עבור מערכות אורתוגונליות

בהן המטריקה תמיד אלכסונית, אפשר להשתמש ב: $\boxed{g_{pq} = \left|\frac{\partial \bar r}{\partial u_p}\right| \cdot \left|\frac{\partial \bar r}{\partial u_q}\right| \cdot \delta_{pq}}$

חישוב אורך הוקטור במערכת החדשה: $\boxed{L^2 = V^j g_{ij} V^i}$

- אם המטריקה סימטרית, אז אורך הוקטור לא תלוי בסדר ההכפלות (אם לוקחים שני וקטורים שונים). אם המטריקה לא סימטרית - התוצאות יהיו שונות.

ממפ"ס 2 - סיכום - מערכות מד"ר

מערכות הומוגניות

$\Rightarrow \dot{\bar u}(t) = \bar{\bar A} \cdot \bar u(t)$

1) מנחשים פתרון "אקספוננציאלי": $\boxed{\bar u(t) = \bar u e^{\alpha t}}$

$\Rightarrow \dot{\bar u}(t) = \alpha \bar u e^{\alpha t} = \alpha \bar u(t)$

2) מציבים את הפתרון לתוך המשוואה המקורית: $\alpha \bar u(t) = \bar{\bar A} \bar u(t)$

$\Rightarrow \bar{\bar A} \bar u(t) - \alpha I \cdot \bar u(t) = \begin{pmatrix} a_{11}-\alpha & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\alpha \end{pmatrix} \bar u(t) = \bar 0$

3) קיבלנו בע"ת ערכים עצמ"ם: $\Delta(\alpha) = \det(\bar{\bar A} - \alpha \bar{\bar I})$

4) מוצאים את הערכים העצמ"ם α_n ובונים את הוקטורים העצמ"ם $\bar u_n$.

5) הפתרון הכללי מורכב מהוקטורים העצמ"ם:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar u(t) &= c_1 \bar u_1(t) + \dots + c_n \bar u_n(t) = \\ &= c_1 \bar u_1 e^{\alpha_1 t} + \dots + c_n \bar u_n e^{\alpha_n t} \end{aligned}}$$

6) אם נתונים תנאי התחלה, ניתן לחשב את המקדמים c_n.

הורדת סדר

ניתן לקחת מד"ר מסדר גבוה ולהפוך אותה לסט משוואות מסדרים נמוכים יותר:

$\Rightarrow a\ddot y + b\dot y + cy = 0$

1) מבצעים חילוף משתנים: $z = \dot y \Rightarrow \dot z = \ddot y$

2) מציבים את סט המשוואות בצורה לינארית:

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a\dot z + bz + cy &= 0 \\ \dot y &= z \end{aligned}\right\} \begin{pmatrix} \dot y \\ \dot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

מערכות לא הומוגניות

$\Rightarrow \dot{\bar{u}}(t) = \bar{\bar{A}}\bar{u}(t) + \bar{V}$

1) מתחילים בכך שמחשבים פתרון הומוגני (מתעלמים מ- $\bar{V}$).

מגיעים לשורה כללית מהסוג: $\bar{u}_h(t) = c_1\bar{u}_1 e^{\alpha_1 t} + \dots + c_n\bar{u}_n e^{\alpha_n t}$

2) כשמחפשים את פתרון פרטי, מחליפים מקדמים c_n בפונקציות $c_n(t)$:

$$\boxed{\bar{u}_p(t) = c_1(t)\bar{u}_1 e^{\alpha_1 t} + \dots + c_n(t)\bar{u}_n e^{\alpha_n t}}$$

3) גוזרים את הפתרון הפרטי (זו גזירה של מכפלה):

$$\dot{\bar{u}}_p(t) = \left[\dot{c}_1(t)\bar{u}_1 e^{\alpha_1 t} + \dots + \dot{c}_n(t)\bar{u}_n e^{\alpha_n t}\right] + \left[c_1(t)\dot{\bar{u}}_1(t) + \dots + c_n(t)\dot{\bar{u}}_n(t)\right] =$$

$$= \bar{\bar{A}}\bar{u}_p(t) + \bar{V} = \bar{\bar{A}}\left[c_1(t)\bar{u}_1(t) + \dots + c_n(t)\bar{u}_2(t)\right] + \bar{V}$$

4) זוכרים, לפי הפתרון ההומוגני, ש: $c_1(t)\dot{\bar{u}}_1(t) + \dots + c_n(t)\dot{\bar{u}}_n(t) = \bar{\bar{A}}\left[c_1(t)\bar{u}_1(t) + \dots + c_n(t)\bar{u}_n(t)\right]$

ולכן האיברים האלה מתבטלים.

5) נשארים עם המערכת הליניארית: $\boxed{\dot{c}_1(t)\bar{u}_1(t) + \dots + \dot{c}_n(t)\bar{u}_n(t) = \bar{V}}$

6) פותרים מערכת של n משוואות כדי לקבל את $\dot{c}_n(t)$ השונים.

7) עושים אינטגרלים כדי למצוא את $c_n(t)$.

תוספת: מערכות משוואות ליניאריות

במציאת בסיס ומימד ובפרט לבדוק מהו מימד מרחב הפתרונות W של מערכת משוואות מסו"מת. מסדרים את "וקטורי" המקדמים של כל משוואה בשורות במטריצה ומדרגים. שורות אפסים מעידות איזה מהמשתנים הם חופשיים.

מס' משתנים חופשיים $= \dim(W)$, והוקטורים שפורסים את הבסיס של W מורכבים לפי הצבות של 1 ו-0 בכל אחד מהמשתנים החופשיים.