20/12/03 אור שג׳ור ©

ממבוא - סיכום

I משפטי גבולות

1) $\lim cf(x) = c\lim f(x)$

2) $\lim (f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$

3) $\lim [f(x)g(x)] = \lim f(x) \lim g(x)$

4) $\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\quad (\lim g(x) \neq 0)$

$\boxed{*}$ 5) $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$ $\quad$ (בתנאי שזה מוגדר)

6) פונקציה רציפה בנקודה x_0 אם $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

7) פונקציה רציפה בתחום $[a,b]$ אם היא רציפה בכל נקודה בתחום.

II כללי גזירה

1) $\frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$

2) $\frac{d}{dx} cf = c\frac{df}{dx}$

3) $\frac{d}{dx}(fg) = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$

4) $\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gf' - fg'}{g^2}$

5) כלל השרשרת: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

6) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

$\boxed{\text{פונקציות לוגריתמיות}}$

$\boxed{*}$ 7) $\frac{d}{dx}\log_a x = \log_a e \frac{1}{x}$

$\boxed{*}$ $\Rightarrow$ $\log_a(1\pm x) = \log_a(1\pm x)^{x\cdot\frac{1}{x}}$

$\Rightarrow$ $\log_x(a) - \log_x(b) = \log_x\left(\frac{a}{b}\right)$

$\boxed{*}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{\log_a e} = \log_e a = \ln a$

$\boxed{*}$ $\frac{d(a^x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = y\log_e a = a^x \ln a$

$\boxed{*}$ במקרה של פונקציה מסוג x^x אפשר להפוך את זה ל-$\ln$: $\{\ln x^x = x\ln x\}$ ואז

לגזור בשני שלבים. קודם גוזרים את הפונקציה החדשה $x\ln x$. את התוצאה

הסופית כופלים בפונקציה המקורית x^x $\left\{\frac{d}{dx}(\ln f(x)) = \frac{1}{f(x)}\frac{df}{dx} \Rightarrow \frac{df}{dx} = f(x)[\ln f(x)]'\right\}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ <u>גזירת פונקציה פרמטרית</u> :

<u>כלל לופיטל</u>: אם בחישוב הגבול מגיעים לביטוי מסוג $\frac{0}{0}$ או $\frac{\infty}{\infty}$ אפשר לגזור את שתי הפונקציות בגבול, עד שההצבה תיתן תשובה הגיונית.

* חשוב לשים לב לגזור רק את <u>החלקים הבעייתיים</u> בגבול!

III <u>חקירת פונקציות</u>

I) <u>תחום הגדרה, רציפות וגזירות</u>

II) <u>זוגיות</u> : f זוגית כאשר $f(x)=f(-x)$

f אי-זוגית כאשר $f(x)=-f(-x)$

לא תמיד זוגיות מוגדרת (למשל כש- $f(x)>0$).

III) <u>נקודות חיתוך עם הצירים</u> : $f(x)=0,\ x=0$.

IV) <u>נקודות סטציונריות ואופיין</u> + <u>התנהגות ב- $\pm\infty$</u> :

מיקום הנקודות $\Leftarrow$ $f'(x)=0$

אופי הנקודה $\Leftarrow$ $f''(x)$.

$$\boxed{\begin{array}{ll} f''(x)>0 & \min \\ f''(x)<0 & \max \end{array}}$$

אם הנגזרת נותנת תוצאה **נגזרת אי-זוגית ⇐ נקודת פיתול**.

ממשיכים לגזור עד שמקבלים תוצאה שלא מתאפסת.

V) <u>אסימפטוטות</u> : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=kx+c$

$K=\infty$ ⇐ אין אסימפטוטות.

$$\boxed{K=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}}$$

$$\boxed{C=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)}$$

VI) <u>סקיצה</u>

IV טור טיילור :

קירוב ה- K

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\left(\frac{d^k f}{dx^k}\right)_{x=x_0}\ ,\quad \frac{d^0 f}{dx^0}=f(x_0),\ 0!=1$$

שארית הטור סביב הנקודה c :

$$\boxed{*}\quad R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x^*)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

$x<x^*<c$

V האינטגרל המסויים

1) $\int_a^b (f\pm g)dx=\int_a^b f dx\pm\int_a^b g dx$

2) $\int_a^b cf dx=c\int_a^b f dx$

3) $\int_a^b f dx=\int_a^c f dx+\int_c^b f dx$

4) $\int_a^b f dx=-\int_b^a f dx$

גזירת אינטגרל :

$\boxed{*}$ 5) $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

$\boxed{*}$ 6) $\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt=f(v(x))\frac{dv}{dx}-f(u(x))\frac{du}{dx}$

אינטגרציה בחלקים :

7) $\boxed{\int fg'dx=fg-\int f'g dx}$

שברים חלקיים :

8) $\frac{3x+2}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)}\Rightarrow\frac{A}{a_1x_1+b_1}+\frac{B}{a_2x+b_2}$

בתנאי שהחזקה הגבוהה ביותר במונה

$\frac{3x+2}{(a_1x+b_1)^n}\Rightarrow\frac{A_1}{(a_1x+b_1)}+\frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2}+\dots+\frac{A_n}{(a_1x+b_1)^n}$

$\frac{3x+2}{(a_1x^2+b_1+c_1)}\Rightarrow\frac{A_1x+B}{a_1x^2+b_1x+c_1}$

פונקציות רציונליות של sinx, cosx

9) $u=\tan\frac{x}{2}$ הצבה של

$\sin\frac{x}{2}=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$

$\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$

$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{2u}{1+u^2}$

$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-u^2}{1+u^2}$

$dx=\frac{2}{1+u^2}du$

תזכורת : 1) אינטגרלים לא מסוימים חייבים להוסיף C בסוף.

2) אינטגרלים מסוימים כשמחליפים משתנים מחליפים גבולות.

אור שגלוור ©

ט) טורי טיילור בגבולות ואינטגרלים

בגבולות, כשיש פונקציות "מסובכות" (טריגו, מעריכיות, e וכו') אפשר לפתח אותן בעזרת טורי טיילור.

כמה טורים בסיסיים

א) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

ב) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

ג) $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$

ד) $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$

ה) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$

ו) $\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots$

ז) $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots$ ■

י) אינטגרלים "לא אמיתיים"

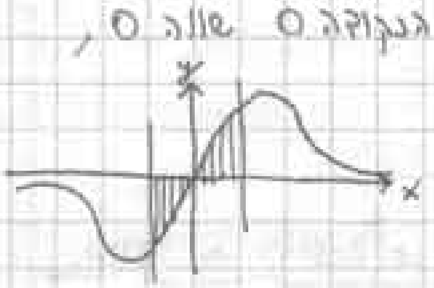
במקרה והפונקציה לא מוגדרת באחד הגבולות, או בתחום בין הגבולות, או במקרה ואחד הגבולות הוא ∞.

א) $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^n f(x)dx$

ב) $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)dx$ במקרה של התבדרות הפונקציה בנקודה x_0 בתוך תחום הגבולות.

אם בסוף החישוב מקבלים ∞ אומרים שהאינטגרל מתבדר/לא קיים/diverges.

12) אינטגרל של פונקציה אי-זוגית ע"פ תחום סימטרי סביב הנקודה 0 שווה 0, בתנאי שהיא לא מתבדרת באותו תחום.



במקרה של פונקציות סימטריות לא חייבים לחשב את כל האינטגרל - אפשר לחשב רק חלק מסוים ולהכפיל במספר החלקים.

20|12|03 אמר סגלוב ©

שימושים של אינטגרלים

$\boxed{VI}$

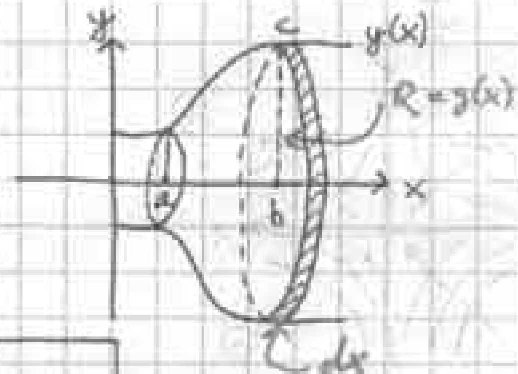
$\boxed{*}$ 1) $\bar{f} = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_a^b dx}$:חישוב ממוצעים

$\boxed{*}$ 2) $\bar{f} = \dfrac{\int_a^b f(x)\,n(x)\,dx}{\int_a^b n(x)\,dx}$:ממוצע משוקלל

3) $S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$:שטח בין עקומות

4) $dl = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$:אורך עקומה

5) **גוף סיבוב - ציר x**



$CB = R$ - רדיוס הדיסקית

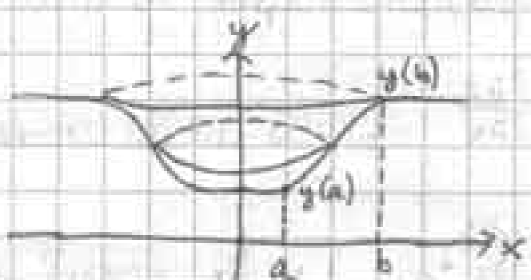
dx - עובי הדיסקית

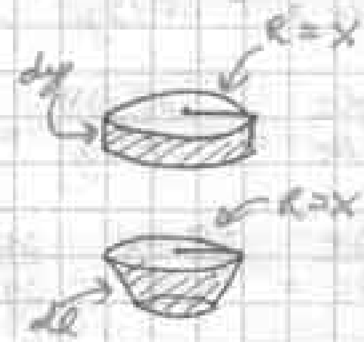
$S_0 = \pi R^2 = \pi[y(x)]^2$

$V_0 = \pi[y(x)]^2 dx \Rightarrow \boxed{V = \int_a^b \pi y^2\,dx}$

$S_0 = 2\pi y\,dl \Rightarrow \boxed{S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}$

6) **גוף סיבוב - ציר y**

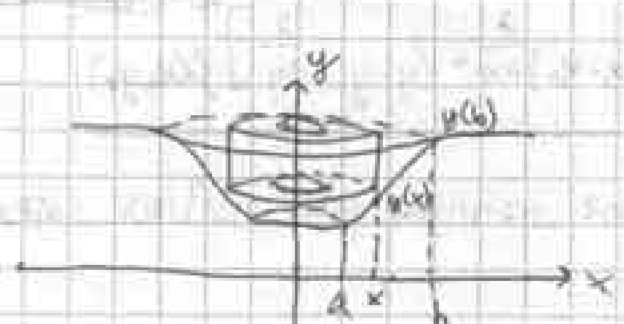


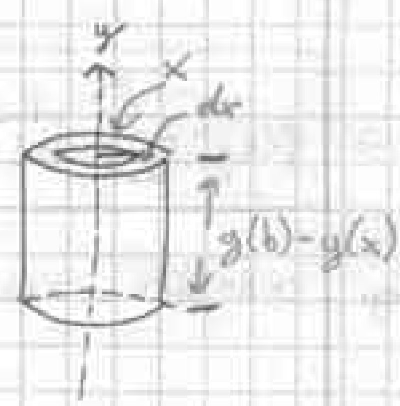


$$\boxed{V = \int_{y(a)}^{y(b)} \pi x^2\,dy \qquad V = \int_a^b \pi x^2 \frac{dy}{dx}\,dx}$$

$$\boxed{S = \int_a^b 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}$$

7) **חלוקה לקליפות**





$2\pi x$ - היקף קליפה

dx - עובי קליפה

$y(b) - y(x)$ - גובה קליפה

$V = \int_a^b 2\pi x\,[y(b) - y(x)]\,dx = \boxed{\int_a^b 2\pi x\,[y_1 - y_2]\,dx}$

VII פונקציות ממשיות של משתנים מרובים $z=f(x,y)$

תחום הגדרה - אוסף כל הנקודות (x,y) בהן הפונקציה מוגדרת.

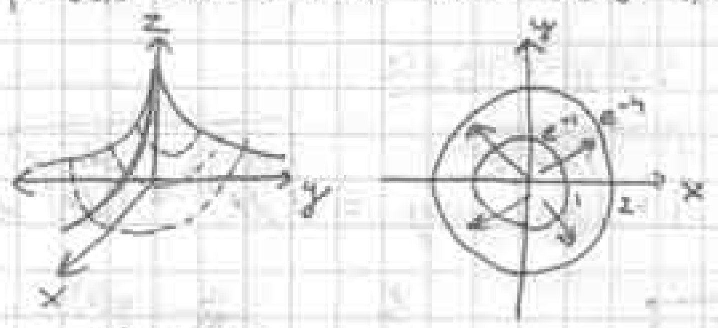
גבולות - הגבול קיים אם ערך הגבול אינו תלוי במסלול דרכו $(x,y)\to(x_0,y_0)$ בעצם הכוונה של שוויון הגבול משני צדי הנקודה.

רציפות - $f(x,y)$ רציפה בנקודה (x_0,y_0) אם $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

היא רציפה בתחום כלשהו אם היא רציפה בכל נקודה בתחום.

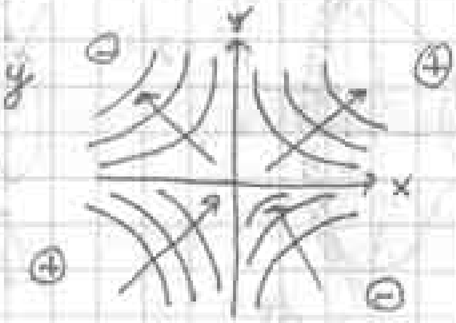
הצגה בקווי גובה

א) $z = e^{-(x^2+y^2)}$



* מקמים את הציור למפה טופוגרפית ומשרטטים קווי גובה לפי התנהגות הפונקציה.

א) $f(x,y) = xy$



VIII נגזרות חלקיות

1) $\dfrac{df}{dz} = \dfrac{df}{dx}\dfrac{dx}{dz} + \dfrac{df}{dy}\dfrac{dy}{dz} + \dots$:כלל השרשרת הכללי

2) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$:נגזרת מלאה של פונקציה סתומה

3) $\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial x}$:פונקציות סתומות: נגזרות חלקיות כנ"ל

4) $\dfrac{\partial F}{\partial s} = \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} + \dots$:כלל השרשרת לנגזרות חלקיות

* 5) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$

IX טור טיילור בריבוי משתנים

$$\Rightarrow \boxed{f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0,y_0)}$$

צריך לשים לב שבה מדובר בפולינום ולכן מתווספת גם הנגזרת המעורבת f_{xy}.

20/12/03 — אור סגלר ©

X מינימום/מקסימום של פונקציה בשני משתנים

תנאי הכרחי: התאפסות הנגזרות הראשונות: $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$

תנאי מספיק: $\boxed{\Delta = f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2>0}$

Δ	$F_{xx}\{F_{yy}\}$	סוגי
+	−	max
+	+	min
−		אוכף
0		מצריך בדיקה נוספת

שיטת כופלי לגרנז' לפונקציות מרובות משתנים

מתבססים על כך שבנוסף לפונקציה יש אילוצים (פונקציות נוספות שמגבילות את הפונקציה המקורית). יוצרים מערכת משוואות בצורה הבאה:

1) משווים את משוואות האילוצים לאפס (הופכים אותם לסתומות).

2) יוצרים משוואה חדשה מחוברת: $G = \underbrace{f}_{\text{הפונקציה המקורית}} + \lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2+\dots+\lambda_k\phi_k$

כופלי לגרנז' — משוואות האילוצים הסתומות

3) משווים את הנגזרות החלקיות הראשונות של G לאפס.

XI טרנספורמציות -

XII אלגברה לינארית על קצה המזלג

$$\begin{matrix} \text{I} & a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ \text{II} & a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{matrix} \Bigg\} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2\end{pmatrix}$$

$$* \quad \boxed{x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}} \quad , \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}}$$

שיטת Kramers

* אם הדטרמיננט במכנה של הקריימר מתאפס אזי שלמערכת המשוואות אין פתרון.

טרנספורמציות יעקוביאניות

1) כלל למציאת נגזרות חלקיות של פונקציות סתומות

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\left|J\left(\frac{F,G}{u,y}\right)\right|}{\left|J\left(\frac{F,G}{u,v}\right)\right|} \qquad \begin{matrix} F(u,v,y)=0 \\ G(u,v,y)=0 \end{matrix}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_v = -\frac{\left|J\left(\frac{F,G}{u,y}\right)\right|}{\left|J\left(\frac{F,G}{x,y}\right)\right|} \qquad \begin{matrix} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{matrix}$$

2) $J\left(\frac{F,G}{x,y}\right) = -J\left(\frac{G,F}{x,y}\right) = J\left(\frac{G,F}{y,x}\right) = -J\left(\frac{F,G}{y,x}\right)$

3) $J\left(\frac{F,G}{x,y}\right) = \frac{1}{J\left(\frac{x,y}{F,G}\right)}$

4) ניתן לבדוק האם קיימת תלות פונקציונלית בין הפונקציות בטרנספורמציה:

$$\left.\begin{array}{l} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{array}\right\}$$ האם $u=u(v)$, כלומר $\phi(u,v)=0$

אם היעקוביאן של הטרנספורמציה $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$ מתאפס - יש תלות.

5) $J\left(\frac{x,y}{r,s}\right) = J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) J\left(\frac{u,v}{r,s}\right)$ כלל השרשרת

תזכורת לטרנספורמציות

1) קואורדינטות קוטביות:

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ r = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}}$$

r חייב להיות חיובי, כיוון שהוא מתאר את רדיוס הצורה.

היחס בין השטחים במערכות השונות ניתן ע"י היעקוביאן: $\left|J\left(\frac{x,y}{r,\theta}\right)\right| = \boxed{r}$

2) קואורדינטות גליליות:

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{bmatrix} r \geq 0 \\ 0 < \varphi \leq 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{bmatrix}}$$

$$\left|J\left(\frac{x,y,z}{r,\varphi,z}\right)\right| = \boxed{r}$$

3) קואורדינטות כדוריות:

$$\boxed{\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \leq r < \infty \\ 0 < \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta < \pi \end{bmatrix}$$

$$\left|J\left(\frac{x,y,z}{r,\theta,\varphi}\right)\right| = \boxed{r^2\sin\theta}$$

XII גזירה מתחת לסימן האינטגרציה

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{d\alpha}\int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx = \int_{u_1(\alpha)}^{u_2(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial\alpha}\,dx + f(u_2(\alpha),\alpha)\frac{\partial u_2(\alpha)}{\partial\alpha} - f(u_1(\alpha),\alpha)\frac{\partial u_1(\alpha)}{\partial\alpha}}$$

בעצם גוזרים את הפונקציה לפי α ועל זה עושים אינטגרציה לפי x. אם גבולות האינטגרל הם פונקציות של α מוסיפים את שני האיברים. מציבים את פונקציית הגבול במקום x וגוזרים את פונקציית הגבול לפי α.

XIII אינטגרלים של פונקציות מרובות משתנים

בכלל מחלקים את שטח או נפח של המלבן להרבה אלמנטי שטח/נפח קטנים, שסוכמים בתוך $\iint_R f(x,y)dxdy$ או $\iiint_R f(x,y,z)dxdydz$. בפועל עושים אינטגרציה לפי אחד המשתנים, בעצם "משטחים" אותו, הופכים אותו לאוסף של ערכים, עליהם עושים אינטגרציה לפי המשתנה הבא.

הטריק הוא הפיכת הגבולות - בד"כ המשתנה הפנימי לפיו עושים אינטגרציה הוא זה שקובע את יתר הגבולות. בד"כ במשתנה הפנימי הגבולות יכילו את הפונקציות ובחיצוני, והוא רק ערכים.

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} dy = \int_a^b dy \int_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)} dx$$

1) $\underbrace{A}_{\text{שטח}} = \iint_R dA = \underbrace{\iint dxdy}_{\text{קרטזיות}} = \underbrace{\iint \underline{r}\,dr\,d\theta}_{\text{קטביות}} = \underbrace{\iiint \underline{r}\,dr\,d\theta\,dz}_{\text{גליליות}} = \underbrace{\iiint \underline{r^2\sin\theta}\,dr\,d\theta\,d\varphi}_{\text{כדוריות}}$

<u>מרכז מסה</u>:

2) $\boxed{X_{cm} = \frac{\iiint \rho x\,dxdydz}{\iiint \rho\,dxdydz} = \frac{\iiint x\,dA}{A}}$, $\rho =$ צפיפות

נכון גם ל- y_{cm}, z_{cm}. <u>חשוב</u>: חישוב מרכז מסה נכון <u>רק</u> בקואורדינטות קרטזיות. במערכות האחרות זה חסר משמעות.

<u>מומנט התמד סביב ציר z</u>:

3) $\boxed{I_z = \iiint r^2\rho\,dA = \iiint r^2\rho\,dxdydz}$

במקרה זה r הוא המרחק מהציר: $\underline{r^2 = x^2+y^2}$

XIV מספרים מרוכבים : $\boxed{z=a+ib}$

$i \equiv \sqrt{-1}$ מספר דמיוני

$Re(z)=a$ החלק הממשי של z

$Im(z)=b$ החלק הדמיוני של z

1) שני מספרים מרוכבים שווים ⟺ החלקים הממשיים שווים והחלקים הדמיוניים שווים.

$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c,\ b=d$

2) צמוד מרוכב (קומפלקסי) : $z^* = \bar{z} = a-bi$

3) אריתמטיקה

חיבור/חיסור : $(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+i(b\pm d)$

כפל : $(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci-bd = (ac-bd)+i(ad+bc)$

חילוק : $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$

$\boxed{*}$ 4) ערך מוחלט : $|z| = |a+ib| \equiv \sqrt{a^2+b^2}$

5) הצגה קטבית : $\Rightarrow z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=|x+iy|$

$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x} \equiv \arg(x+iy)$

שני מספרים מרוכבים שווים בהצגה קטבית ⟺ $\varphi_1=\varphi_2+2\pi k,\ r_1=r_2$.

6) פעולות בהצגה קטבית

$\Rightarrow$ כפל : $[r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)][r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)] = \boxed{r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]}$

$\Rightarrow$ חילוק : $\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)} = \boxed{\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]}$

$\Rightarrow$ חזקה : $\boxed{z^n = r^n[\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)]}$ נוסחת deMoivre :

$$\boxed{z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right],\ k=\{0,1,\dots,n-1\}}$$

$\Rightarrow$ צמוד : $z^* = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]$

© אלי סבאג

7) מספרים מרוכבים לפי Euler

נוסחת Euler:

$$\Rightarrow \boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}}$$

$$z^* = r[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)] = re^{-i\varphi}$$

$\Rightarrow$ כפל: $\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}}$

$\Rightarrow$ חילוק: $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}}$

$\Rightarrow$ חזקה: $\boxed{z^n = r^n e^{in\varphi} = (re^{i\varphi})^n}$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

אינסוף פתרונות

$$\boxed{\ln z = \ln\left[re^{i(\varphi+2\pi n)}\right] = \ln r + i(\varphi + 2\pi n)\ ,\ n = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}}$$

$$\boxed{z_1^{z_2} = e^{(\ln z_1)^{z_2}} = e^{z_2 \ln z_1}}$$

8) נוסחאות טריגונומטריה

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)+(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{2} = \cosh(i\varphi)$$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)-(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{2i} = -i\sinh(i\varphi)$$

$$\boxed{\begin{matrix}\cos\varphi = \cosh(i\varphi) \\ i\sin\varphi = \sinh(i\varphi)\end{matrix}}\ ,\ \boxed{\begin{matrix}\cos(i\varphi) = \cosh(\varphi) \\ \sin(i\varphi) = i\sinh(\varphi)\end{matrix}}$$

9) תכונות של צמוד

$$\Rightarrow z + z^* = (a+ib) + (a-ib) = 2a = 2Re(z)$$

$$\Rightarrow z - z^* = 2i\,Im(z)$$

$$\Rightarrow (z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

$$\Rightarrow (z_1 \pm z_2)^* = z_1^* \pm z_2^*$$

$$\Rightarrow z \cdot z^* = |z|^2$$

אור סגלוב ©

XV משוואות דיפרנציאליות

(—) משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

1) משוואות ליניאריות:
$\Rightarrow y' + p(x)y = g(x)$

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int g(x) e^{\int p(x)dx} dx\right]}$$

2) משוואת Bernoulli:
$\Rightarrow y' + p(x)y = g(x)y^{n}$

משתמשים בהצבה:

$$\boxed{\begin{array}{l} v = y^{1-n} \\ \frac{dv}{dx} = v' = (1-n)\,y^{-n}\,\frac{dy}{dx} \end{array}}$$

3) הפרדת משתנים:
$\Rightarrow g(y)\,dy = f(x)\,dx$

$$\boxed{\int g(y)dy = \int f(x)dx + c}$$

4) משוואות הומוגניות:
$\Rightarrow f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{n} f(x,y)$

משתמשים בהצבה: $\boxed{y = vx \ , \ y' = v'x + vx'}$

5) טרנספורמציות ליניאריות:
$\Rightarrow (a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy$

מוצאים את נקודת החיתוך של שני הקווים הישרים: (h,k) ואז משתמשים בטרנספורמציה:
$\boxed{x' = x-h \ , \ y' = y-k}$
וכך הופכים את המשוואה שוב להומוגנית.

6) משוואות מדויקות:
$\Rightarrow M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \ , \ \underline{M_y = N_x}$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \phi = \int M(x,y)\,dx + h(y) \\ \phi = \int N(x,y)\,dy + g(x) \end{array}\right\} \phi = f(x,y) = c}$$

7) משוואות לא מדויקות:
$\Rightarrow M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \ , \ \underline{M_y \neq N_x}$

מכניסים גורם אינטגרציה: $\mu(x,y)\left[M(x,y)dx + N(x,y)dy\right] = 0$

א) אם $\frac{M_y - N_x}{N}$ תלוי רק ב-x $\Leftarrow$ $\mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$

ב) אם $\frac{M_y - N_x}{M}$ תלוי רק ב-y $\Leftarrow$ $\mu = e^{-\int \frac{M_y - N_x}{M} dx}$

8) משוואות Rikatti: $\Rightarrow y' = q_1(x) + q_2(x)y + q_3(x)y^2$

בתנאי שקיים פתרון אחד $y_1(x)$

$$\boxed{y = y_1(x) + \frac{1}{v} \ , \quad y' = y_1'(x) - \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}}$$

משוואות דיפרנציאליות מסדר שני

1) הורדת סדר (I): אין תלות ב-y: $\Rightarrow y'' = f(x, y')$

מציבים:
$$\boxed{y' = p \ , \quad y'' = \frac{dp}{dx}}$$

הורדת סדר (I): אין תלות ב-x: $\Rightarrow y'' = f(y, y')$

מציבים:
$$\boxed{y' = p \ , \quad y'' = p\frac{dp}{dy}}$$

2) משוואות לינאריות הומוגניות: $\Rightarrow y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

באופן כללי, מקבלים פתרון כללי: $y = c_1y_1 + c_2y_2$, בתנאי שני הפתרונות הפרטיים y_1, y_2 אינן תלויות-לינארית. כדי לבדוק שאין תלות משתמשים ב-Wronskian:

$$\boxed{W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0}$$

לפתרון כללי בצד קיום סופרפוזיציה.

שיטות פיתרון

א) הורדת סדר (II):   ידוע פתרון פרטי $y_1(x)$ $\Rightarrow y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$,

$$y_2 = vy_1 \ , \quad y_2' = v'y_1 + vy_1' \ , \quad y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx}$$

ב) מקדמים קבועים: $\Rightarrow ay'' + by' + cy = 0$

פתרון אופייני: $am^2 + bm + c = 0 \Rightarrow m_{1,2}$

I) שני פתרונות ממשיים שונים: $\boxed{y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}}$

II) פתרונות ממשיים שווים: $\boxed{y = c_1e^{mx} + c_2xe^{m_2x}}$

III) פתרונות מרוכבים: $\boxed{y = e^{\lambda x}[c_1\cos(\mu x) + c_2\sin(\mu x)]}$

$$\boxed{y = Ae^{\lambda x}\cos(\mu x + \delta) = Ae^{\lambda x}\sin(\mu x + \delta)}$$

גלעד סגלוב ©

ב) מקדמים משתנים - משוואות Euler:

$\Rightarrow x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0 \quad , x>0$

מקדמים קבועים: $z=\ln x \Rightarrow \frac{d^2y}{dz^2}+(\alpha-1)\frac{dy}{dz}+\beta y=0$

ג) משוואות ליניאריות לא הומוגניות:

$\Rightarrow y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$

מתחילים בכך שמוצאים פתרון הומוגני y_h ואחר פתרון פרטי: y_p (בשיטות שונות).

את שני הפתרונות מחברים לפתרון כללי: $y=y_h+y_p$.

שיטות פתרון:

א) המקדמים הנעלמים:

עובדת לשלוש פונקציות: פולינום, טריג, אקספוננט.

$\Rightarrow$ פולינום: $y_p=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\dots+A_n$

$\Rightarrow$ אקספוננט: $y_p=Ae^{ax}$

$\Rightarrow$ טריג: $y_p=A\cos(ax)+B\sin(ax)$

- במקרה ומתוך הפתרון הפרטי מקבלים את הפתרונות ההומוגניים, כופלים את הפתרון הפרטי ב-x או x^2 (תלוי כמה מההומוגניים הוא כולל).
- אם יש הרבה חיבור או כפל של שלוש הפונקציות, מתייחסים לכל "תת-פונקציה" בנפרד ובסוף מחברים/כופלים את הפתרונות הפרטיים שהתקבלו.

ב) שיטת הוריאציה:

משתמשים בפתרון פרטי מסוג: $y_p=u_1(x)y_1(x)+u_2(x)y_2(x)$

אחרי שמציבים את הביטוי במד"ר ומטפלים במערכת בעזרת קרמר, מגיעים לנוסחה:

$$\boxed{y_p=u_1y_1+u_2y_2=-y_1\int\frac{y_2g}{W}dx+y_2\int\frac{y_1g}{W}dx}$$

משוואות דיפרנציאליות מסדר גבוה

1) **משוואות הומוגניות עם מקדמים קבועים:** $\Rightarrow a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$

פולינום אופייני: $a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \dots + a_{n-1} m + a_n = 0$

n פתרונות (m) שונים בפתרון: $\Rightarrow \boxed{y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n m^{nx}}$

אם שורש m_1 חוזר על עצמו s פעמים: $\cancel{y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + c_3 x^2 e^{m_1 x} + \dots + c_{s-1} x^{s-1} e^{m_1 x}}$

$$\boxed{y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + c_3 x^2 e^{m_1 x} + \dots + c_s x^{s-1} e^{m_1 x} + \dots + c_n e^{m_n x}}$$

2) **מקדמים נעלמים:** כמו במשוואות מסדר שני.

3) **שיטת הוריאציה:** ידועים הפתרונות ההומוגניים: $y_1, y_2, \dots, y_n$.

$$\Rightarrow y_p = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x) + \dots + u_n(x) y_n(x)$$

גוזרים n פעמים. את ה-$(n-1)$ משוואות הראשונות משווים לאפס, ומקבלים מערכת נגזרות של $u_1, u_2, \dots, u_n$. את המשוואה האחרונה משווים ל-$g(x)$.

$$\boxed{u_m = \int \frac{g(x) W_m(x)}{W(x)} dx} \quad , \quad W = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad , \quad W_m = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & 0 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & 0 & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & 1 & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

העמודה ה-m ב-Kramer