קלסית 1 - סיכום

I קינמטיקה

באופן כללי מגדירים את המשתנים הבאים:

כאשר משוואות כלליות אלה נכונות לכל סוגי התנועה.

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = f(t)$$

$$\bar{V} = \frac{d\bar{x}}{dt}, \quad V_{ave} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

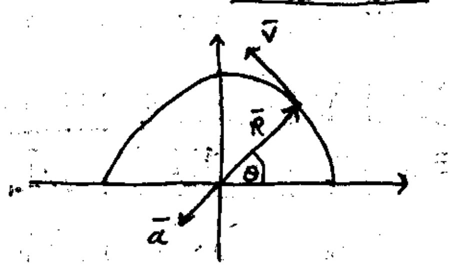
$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt}, \quad a_{ave} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{V} = \bar{V}_0 + \int_{t_0}^{t} \bar{a}\,dt$$

עבור $\bar{a}$ קבוע:

$$\bar{X} = \bar{r} = \bar{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \bar{V}_0 dt = \bar{r}_0 + \bar{V}_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\bar{a}(t-t_0)^2$$

תנועה מעגלית



עבור מהירות זוויתית (ω) קבועה:

$$\Rightarrow \quad \theta = \omega t$$

$$\bar{r} = R\cos(\omega t)\hat{x} + R\sin(\omega t)\hat{y}, \quad |\bar{r}| = R$$

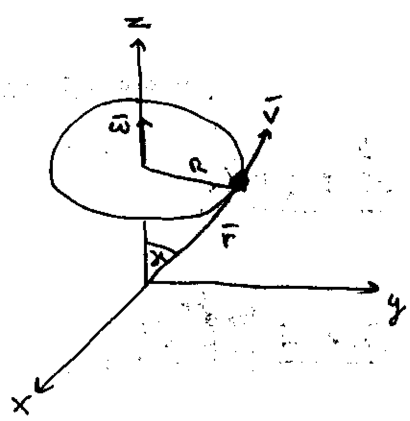
$$\bar{V} = R\omega(-\sin(\omega t)\hat{x} + \cos(\omega t)\hat{y}), \quad |\bar{V}| = \omega R$$

$$\bar{a} = -R\omega^2(\cos(\omega t)\hat{x} + \sin(\omega t)\hat{y}), \quad |\bar{a}| = \omega^2 R$$

$$\frac{V_y}{V_x} = \tan\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$ $\bar{V}$ תמיד משיק למסלול.

$$\frac{a_y}{a_x} = \tan(\omega t + \pi) \Rightarrow$$ $\bar{a}$ תמיד מאונך למהירות

הצגה וקטורית



$$R = r\sin\chi$$

$$|\bar{V}| = \omega R = \omega r \sin\chi$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}}$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\omega} \times \bar{V}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{a} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})}$$

מערכת צירים פולריים

בהרבה תרגילים, בעיקר של תנועה מעגלית, יהיה נוח לעבוד עם צירים קוטביים שמשתנים עם תנועת הגוף. במקרה כזה צריך לזכור שגם הצירים הם פונקציות בזמן.

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}$$

$$\dot{\hat{r}} = -\dot{\theta}\sin\hat{x} + \dot{\theta}\cos\hat{y} = \dot{\theta}\hat{\theta}, \quad \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\cos\theta\hat{x} - \dot{\theta}\sin\hat{y} = -\dot{\theta}\hat{r}$$

$$\ddot{\hat{r}} = -\dot{\theta}^2\cos\hat{x} - \dot{\theta}^2\sin\hat{y} = -\dot{\theta}^2\hat{r}, \quad \ddot{\hat{\theta}} = \dot{\theta}^2\sin\theta\hat{y} - \dot{\theta}^2\cos\theta\hat{y} = -\dot{\theta}^2\hat{\theta}$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} \dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta} & \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r} \\ \ddot{\hat{r}} = -\dot{\theta}^2\hat{r} & \ddot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}^2\hat{\theta} \end{array}}$$

- תאוצה משיקית ותאוצה רדיאלית

בכל תנועה מעגלית (לאו דווקא עגול, גם אליפסה. בעצם כל תנועה בה קיים ציר סבוב כלשהו) ניתן לפרק את תאוצת הגוף לשני רכיבים:

תאוצה רדיאלית: רכיב התאוצה לפי מרכז הסבוב, משנה את כיוון הגוף: $\boxed{\bar{a}_R = \bar{a}\cdot\hat{r}}$

תאוצה משיקית: רכיב התאוצה בכיוון מהירות הגוף, משנה את גודל המהירות: $\boxed{\bar{a}_T = \bar{a}\cdot\hat{v}}$

II חוקי ניוטון

"חלקיק חופשי" ≡ גוף שאין לו אף אינטראקציה עם גוף אחר - לא פועלים עליו כוחות כלשהם.

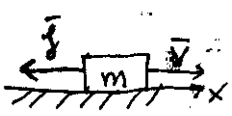
1) **חוק 1**: חלקיק חופשי נע בתנועה קבועה מהירות בגודלה ובכיוונה, ביחס לצופה (או למערכת צירים) שגם הם חופשיים. למערכת כזו קוראים מערכת אינרציאלית/יחסותית.

② **חוק 2**: $\boxed{\sum \bar{F} = m\bar{a} = \left[\frac{kg\cdot m}{s^2}\right] = [N]}$

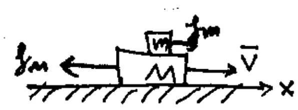
③ **חוק 3**: כל הכוחות פועלים בזוגות. כשגוף א' מפעיל כוח על גוף ב', גוף ב' יפעיל את אותו הכוח בהתנגדות על גוף א'. $\boxed{\bar{F}_2 = -\bar{F}_1}$

III חיכוך

כוח החיכוך תמיד מנוגד לכיוון של המהירות היחסית בין שני גופים.



למסה m יש מהירות $\bar{V}$ יחסית לקרקע:



המסה M נעה יחסית לקרקע במהירות $\bar{V}$ עם ציר ה-x.
לכן f_M מנוגד לכיוונו $-\hat{x}$. כש-M נעה קדימה, m "מרגישה" שהיא נעה אחורה, ולכן החיכוך בין M ל-m יהיה בכיוון $+\hat{x}$. בגלל הכוח שקובע ששתי המסות ינועו ביחד.

כוח החיכוך תמיד פרופורציונלי לכוח התמיכה הנורמלי: $\boxed{f = \mu N}$
כאשר μ הוא מקדם החיכוך, והוא נחלק לשני סוגים:

חיכוך סטטי: חיכוך שקיים לפני תחילת התנועה. כדי להתחיל תנועה של גוף צריך להפעיל כוח מספיק גדול להתגבר על החיכוך הסטטי: $\boxed{F_{min} = f_{max} = \mu_s N}$

חיכוך קינטי: כשהגוף מתחיל לנוע, החיכוך הסטטי "נשבר" ומופיע חיכוך קינטי, שתמיד חלש יותר מהחיכוך הסטטי: $\boxed{\mu_k < \mu_s}$

- כיוון שהחיכוך מנוגד למהירות היחסית של הגוף, לא תמיד אפשר יהיה לקבוע את כיוונו בוודאות בתחילת התרגיל. במקרה כזה קובעים את כיוונו באופן שרירותי ובסוף התרגיל הסימן יתקן מעצמו (אם הכיוון הפוך יופיע מינוס).

- <u>חיכוך בנוזלים</u>

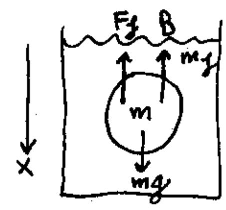
$$\boxed{\bar{F}_f = -\varkappa \eta \bar{v}}$$

$\varkappa \equiv$ גורם גיאומטרי של הגוף

$\eta \equiv$ מקדם הצמיגות של התווך $= [N s m^{-2}]$

על גופים ששוקעים בתוך נוזל (או גז) פועלים, בנוסף לכוחות חיצוניים, כוח החיכוך (כמו שנראה גם תלוי במהירות מנוגד בכיוונו) וכוח הציפה B (Buoyancy):

$$\boxed{B = m_f g}$$



הגוף דוחה את הנוזל בו הוא נמצא, ומשקלו מפסיד את משקל הנוזל הנדחה: $m_f g$.

כיוון שהחיכוך תלוי במהירות, ככל שהמהירות תגדל, התאוצה תקטן, עד שהגוף יגיע למהירות המקסימלית שלו, ואחריה $\bar{a}=0$.

$$ma = mg - B - F_f = g(m-m_f) - \varkappa \eta v$$

$$a=0 \; : \quad \boxed{V_L = \frac{(m-m_f)g}{\varkappa \eta}} \boxed{= \frac{F}{\varkappa \eta}}$$

כדי למצוא את המהירות עצמה (כתלות בזמן) צריך לפתור מד"ר שבסופה מקבלים:

$$\boxed{V = \left(V_0 - \frac{F}{\varkappa \eta}\right) e^{-\frac{\varkappa \eta}{m} t} + \frac{F}{\varkappa \eta}}$$

ובו: $t \to \infty$ נקבל את המהירות הגבולית.

- <u>חוק שימור החוט</u>

בתרגילי גלגלות צריך לבנות סט של משוואות כדי לפתור את סט הנעלמים היחסית גדול (תאוצות הגופים, המתיחויות של החוטים). כדי לפתור שאלה כזו כדאי לבנות 3 חלקים:

1) <u>משוואות הכוחות של הגופים</u> (נותן תאוצות ומתיחויות).
2) <u>משוואות הכוחות של הגלגילות</u> (נותן תלות בין מתיחויות).
3) <u>התאוצות כתלות באורך החוטים</u> (נותן תלות בין תאוצות).

צריך לזכור:

$$\boxed{\bar{a} = \ddot{l}}$$

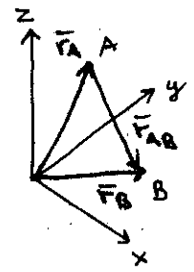
ואת חוק שימור החוט:

$$\boxed{\ddot{L} = \sum \ddot{l}_i = 0}$$

אור גבאור ©

IV מערכות ייחוס

1) תנועה יחסית בתוך מערכת צירים



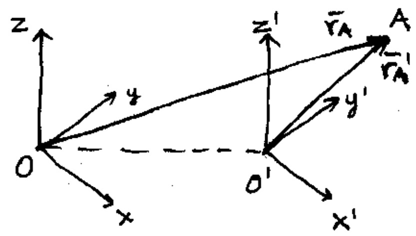
$$\bar{r}_{AB} = \bar{r}_A - \bar{r}_B$$

$$\boxed{\bar{V}_{AB} = \frac{d\bar{r}_{AB}}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} - \frac{d\bar{r}_B}{dt} = \bar{V}_B - \bar{V}_A}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{a}_{AB} = \bar{a}_A - \bar{a}_B}$$

2) תנועה יחסית קווית של שתי מערכות צירים

נסתכל על שתי מערכות צירים שנעות במהירות קווית יחסית אחת לשנייה.



$\bar{V}_0 \equiv$ המהירות היחסית של המערכות

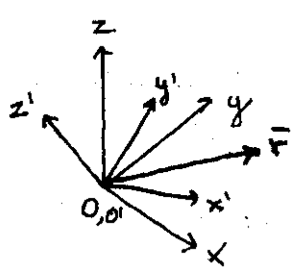
$$\left.\begin{aligned} \bar{OA} &= \bar{OO'} + \bar{OA'} \\ \bar{OO'} &= \bar{V}_0 t \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\bar{r}_A = \bar{r}'_A + \bar{V}_0 t}$$

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{V}' = \bar{V} - \bar{V}_0}$$

אם המהירות היחסית של מערכות הצירים הייתה קבועה, היינו מקבלים $\bar{a}=\bar{a}'$.

3) מערכות צירים מסתובבות

המקרה היותר חשוב, כיוון שיש לזכור שכדור הארץ הוא מערכת צירים מסתובבת.



מערכת הצירים O' מסתובבת סביב המערכת O סביב ציר סיבוב משותף $\bar{\omega}$.

במערכת המקובעת O :

$$\begin{cases} \bar{r} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z \\ \bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \sum_i \frac{dx_i}{dt}\hat{u}_{x_i} \\ \bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \sum_i \frac{dv_i}{dt}\hat{u}_{x_i} \end{cases}$$

במערכת המסתובבת O':

$$\begin{cases} \bar{r}' = x'\hat{u}_{x'} + y'\hat{u}_{y'} + z'\hat{u}_{z'} \\ \bar{V}' = \frac{d\bar{r}'}{dt} = \sum_i \frac{dx'_i}{dt}\hat{u}_{x'_i} \\ \bar{a}' = \frac{d\bar{V}'}{dt} = \sum_i \frac{dv'_i}{dt}\hat{u}_{x'_i} \end{cases}$$

- צופה שנמצא באחת המערכות ימדוד את מיקומו, מהירותו ותאוצתו בהתאם לצירים שלו.

מה שמעניין הוא איך צופה במערכת א' יתאר את התנועה לפי מערכת ב'.

- צופה במערכת המסתובבת נע עם הצירים ולכן עבורו הם מקובעים. אבל צופה במערכת המקובעת ל-O יראה את הצירים של 'O נעים ולכן יתאר את תנועת הגוף ע"י O בצורה שונה:

$$\frac{d\bar r'}{dt} = \sum_i \left[\frac{dx_i'}{dt}\hat u_{x_i'} + x_i' \frac{d\hat u_{x_i'}}{dt} \right] = \bar V' + x_i' \frac{d\hat u_{x_i'}}{dt}$$

בגלל שהתנועה מעגלית ניתן לומר: $\frac{d\bar r}{dt} = \bar\omega \times \bar r$

וכיוון שמערכת 'O נמצאת בתנועה מעגלית יחסית למערכת O: $x_i' \frac{d\hat u_{x_i'}}{dt} = \dots = \bar\omega \times \bar r$

ומכאן נקבל ביטוי עבור מהירות הגוף ע"י O יחסית למהירות ב-'O: $\boxed{\bar V = \bar V' + \bar\omega \times \bar r}$

בצורה דומה נמצא את הקשר בין התאוצות ונקבל: $\boxed{\bar a = \bar a' + 2\bar\omega \times \bar V' + \bar\omega \times (\bar\omega \times \bar r)}$

התיקון הראשון במשוואה, $2\bar\omega \times \bar V'$, נקרא <u>תאוצה קוריוליס</u> והתיקון השני: <u>תאוצה צנטריפוגלית</u>.

צריך להדגיש שאלה תיקונים, ולא תאוצות אמיתיות. הן נגרמות כתוצאה מ"<u>כוחות מקומיים</u>" שהצופה במערכת המסתובבת מרגיש, כיוון שהוא לא מודע לסיבוב שלו.

- <u>פתרון תרגילים</u>

$\bar a$ יחושב ע"י סכום הכוחות האמיתיים שפועלים על הגוף.

$\bar r, \bar V'$ יחושבו עבור הרגע הראשון של התנועה, $t=0$. לפי ערכים אלה יחושב תאוצת קוריוליס והתאוצה הצנטריפוגלית.

כך יתן לנו משוואות תנועה של הגוף (בד"כ בצורת מד"ר).

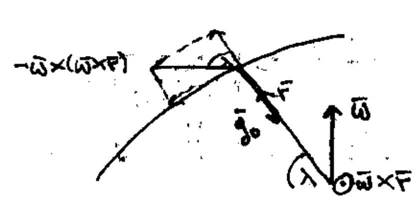
בהרבה מקרים <u>איזון</u> הכוחות "<u>האמיתיים</u>" יוחלף ע"פ איזון הכוחות <u>המקומיים</u> ברגע $t=0$.

- <u>תנועה על כדור הארץ</u>

על כדוה"א נקבל שתי תופעות כתוצאה מהתיקונים לתאוצה שאנו מודדים.

תאוצת הכובד שנמדוד קטנה מ-$\bar g_0$: $\bar g' = \bar g_0 - |\bar\omega \times (\bar\omega \times \bar r)|\cos\lambda = g_0 - \omega^2 r \cos^2\lambda$

והרכיב השני של התאוצה הצנטריפוגלית ימשוך את הגוף הצידה,



גופים בתנועה על גלגל ירגישו גם את השפעת הכוח הקוריולי.

גופים בחצי הכדור הצפוני יסטו ימינה, ובכדור הדרומי - שמאלה (ציר סיבוב הפוך).

$\boxed{V}$ מתקף ותנע

- מתקף (Impulse) מוגדר כוח שפועל לאורך זמן:

$$\boxed{I = \int F dt = \int dP = \Delta P}$$

- תנע (momentum) מוגדר כמסה כפול מהירות:

$$\boxed{\bar{P} = m\bar{v}}$$

<u>בהיעדר כוחות חיצוניים, התנע של מערכת נשמר קבוע.</u>

מתוך חוק שמור התנע ניתן להגיע לחוקי ניוטון: (החוק השני)

$$1 \quad \frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{d(m\bar{v})}{dt} = m\bar{a} = \bar{F}$$

$$2 \quad \bar{P}_1 + \bar{P}_2 = \bar{P}_1' + \bar{P}_2'$$

$$\Rightarrow \Delta\bar{P}_1 = -\Delta\bar{P}_2$$

$$\Rightarrow \bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$$ (החוק השלישי)

<u>בפתרון תרגילים</u>: כיוון שבד"כ לא פועלים כוחות חיצוניים התנע של המערכת נשמר קבוע, נוח להשתמש בחישובי תנע בשאלות של התנגשויות, התפרקויות ופיצוצים.

- <u>מרכז מסה</u>

לכל גוף או מערכת גופים ניתן לחשב את מרכז המסה:

$$\boxed{\bar{r}_{cm} \equiv \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i}}$$

או, אם צריך לחשב את הקואורדינטות של גופים מורכבים:

לגופים תלת-מימדיים:

$$\boxed{X_{cm_i} = \frac{\iiint \rho x_i dV}{\iiint \rho dV} = \frac{1}{M}\iiint \rho x_i \, dV}$$

בהרבה מקרים כדאי לבדוק האם מבנה הגוף יכול לפשט את החישובים משיקולי סימטריה (חלוקה שווה סביב הצירים, למשל).

הרבה תרגילים ניתן לפשט בכך שמסתכלים על תנועת הגופים במערכת יחסית למרכז המסה, ומוסיפים תנועה זו לתנועת מרכז המסה יחסית למערכת הצירים שלנו:

1) <u>תנועת כל גוף יחסית למרכז המסה</u>

2) <u>תנועת מרכז המסה יחסית לצירים קבועים.</u>

3) <u>חיבור התנועות.</u>

- <u>מרכז מסה של מערכת גופים</u>:

$$\boxed{\bar{r}_{cm} \doteq \frac{\sum M_i \bar{r}_{cm_i}}{\sum M_i}}$$

מערכות עם מסה משתנה -

$$\boxed{\bar F = \frac{d\bar p}{dt} = \frac{d(m\bar v)}{dt} = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}}$$

צריך לזכור שהתנע תלוי גם במהירות וגם במסה:

בשאלות מהסוג של: גשם נופל לתוך קרון, חול נשפך מקרון, רקטות, צריך לשים לב ש<u>מסת הגוף משתנה עם הזמן</u>.

בשאלות כאלה צריך לשים לב לשני דברים:

1) <u>כיצד המסה משתנה עם הזמן</u>.

2) <u>האם הטיפות/חול/חומר בעירה מעביר/לוקח תנע - האם הוא משפיע על מהירות הגוף</u>.

למשל: במקרה I החול שנשפך מהקרונית משפיע על המסה שלה. אבל כיוון שהוא יוצא עם אותה מהירות על ציר x כפי שהייתה לו בקרונית, הוא לא מעביר/לוקח תנע:

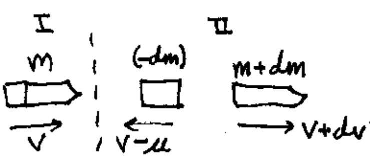
$$\frac{dm}{dt}(V_f - V_i) = 0$$

במקרה II הגשם שנופל לתוך הקרונית משנה את מסת הקרונית. אבל הפעם יש גם שינוי מהירות: כשהגשם נופל אין לו מהירות על ציר x, אבל כשהוא פוגע בקרונית הוא מקבל את המהירות שלה ויש שינוי תנע:

$$\bar F = \underbrace{(m + Jt)}_{\text{קצב שינוי המסה}} + \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\text{פגיעת הטיפות}} = (m+Jt) + \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{\text{קצב שינוי המסה}}\underbrace{V}_{\text{מהירות הקרונית}}$$

<u>תנועת רקטות</u>

הטיל הודף החוצה את חומר הבעירה שלו ולכן משתנה גם המסה וגם המהירות שלו:



נסתכל על מקרה בו חומר הבעירה יוצא במהירות u ביחס לטיל:

$$\Delta P = P_{II} - P_I = [(m+dm)(v+dv) + (-dm)(v-u)] - mV = \dots = mdv + \underbrace{dmdv}_{\text{זניח}} + udm = mdv + udm$$

הכוח החיצוני היחיד במערכת: $F = -mg$

$$\Rightarrow \frac{mdv}{dt} + u\frac{dm}{dt} = -mg$$

ומכאן, בעזרת אינטגרציה, נוכל למצוא את מהירות הטיל:

$$\boxed{V = V_0 + u\ln\left(\frac{m_0}{m_f}\right) - gt}$$

אור שגור
©

VI עבודה ואנרגיה

העבודה שמבצע כח $\bar F$ הפועל על גוף שמועתק לאורך $\Delta\bar r$ מוגדר:

$$\boxed{\Delta W = \bar F \cdot \Delta \bar r}$$

כאשר בעצם מתחשבים רק על רכיב הכח לאורך אותו מקטע:

$$\boxed{\Delta W = F_i \Delta r_i}$$

ובמקרה של מסלול עקום (עם קשת Δs בזווית θ):

$$\Delta W = F \cdot \Delta s \cdot \cos\theta$$

ובהכללה נציין, אם נסתכל על הכח כצורה רציפה:

$$\boxed{W = \int \bar F d\bar r = \sum_i \int F_i dr_i}$$

כאשר על כרגע נסכם את האינטגרל רק לאורך ציר i:

עבודה ואנרגיה קינטית

$$\boxed{E_K \equiv \frac{1}{2} m v^2}$$

$$W = \int F dr = \int m \frac{dv}{dt} dr = \int m v dv = \frac{1}{2} m (\Delta v)^2 = \Delta E_K$$

עבודת הכח השקול שווה להפרשי האנרגיה הקינטית של הגוף:

$$\boxed{W = \Delta E_K}$$

כח משמר

1) כח שהעבודה אותה הוא מבצע בין A ל-B איננה תלויה במסלול.
2) כח שהעבודה אותה הוא מבצע לאורך מסלול סגור כלשהו, שווה לאפס.

שקול

$\bar F$ יוגדר ככח משמר אמ"מ מתקיים $\bar\nabla \times \bar F = 0$:

$$\boxed{\bar F \text{ כח משמר} \Longleftrightarrow \bar\nabla \times \bar F = 0}$$

אומנם כלל (לפי פיינמן) כל הכוחות בטבע הם כוחות משמרים, למרות שיהיו כוחות ש"יראו" כאילו הם לא משמרים (חיכוך, גרר) בגלל הסקלה בה אנו בוחנים אותם.

פוטנציאל של כח משמר

כיוון שהעבודה של כח משמר איננה תלויה במסלול, אפשר להגדיר פונקציית פוטנציאל:

$$\boxed{-\int_A^B \bar F d\bar r = U(B) - U(A)}$$

נוכל לפתח את הגדרת הפונקציה למושג של שדה: פונקציה שבכל נקודה במרחב יש וקטור:

$$\boxed{U = -\int \bar F d\bar r = -m \int \bar C \, d\bar r = m\Psi}$$

$\bar C$ הוא שדה הפוטנציאל, ואינטגרל עליו יתן לנו פונקציה סקלרית Ψ איתה קל יותר לעבוד.

מתוך פונקציית הפוטנציאל ניתן למצוא את הכח:

$$\boxed{\bar F = -\bar\nabla U}$$

<u>לכן, מתוך משוואה שמתארת את האנרגיה הפוטנציאלית של גוף ניתן למצוא את הכח השקול הפועל עליו.</u>

חוק שימור אנרגיה

עבור כוחות משמרים:

$$\boxed{E_K + E_p = const}$$

$W = \int \bar{F} d\bar{r}$

חישוב עבודה לאורך מסלול:

במקרה ונתון מסלול $\bar{r}$ בצורה פרמטרית, נחשב את העבודה כך:

1) מציבים את $\bar{F}$ לפי $\bar{r}$: $\bar{F}(\bar{r}(u))$. כלומר: כל ה-x_i של $\bar{r}$ יוצב בכל מקום שמופיע x_i ב-$\bar{F}$.

2) מחשבים: $d\bar{r} = \frac{d\bar{r}}{du} du$

3) מכפילים: $[\bar{F}(\bar{r}(u))] \cdot \left(\frac{d\bar{r}}{du}\right)$

4) מחשבים אינטגרל על du:

$$\boxed{\oint_c \bar{F} d\bar{r} = \int_{u_1}^{u_2} \left[\bar{F}(\bar{r}(u)) \cdot \frac{d\bar{r}}{du}\right] du}$$

משפט סטוקס

נזכיר את משפט סטוקס לחישוב אינטגרלים על שפה:

$$\oint \bar{A} d\bar{l} = \iint_S (\bar{\nabla} \times \bar{A}) \hat{n} ds$$

הכח שפועל לאורך שפה של גוף סגור שווה לשטף הכח (וקטור) הניצב לשטח.

אנרגיה קינטית במערכת מרכז-מסה

מרכז המסה של גוף, בכלל, מפשט חישובים. כמו שפירקנו תנועת מערכת לתנועה של מרכז-המסה + תנועת החלקיקים יחסית למרכז-המסה (מ"מ), כך נוכל להפריד גם אנרגיה קינטית:

$$\boxed{E_K = E_{K_{cm}} + \frac{1}{2} M V_{cm}^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 + \frac{1}{2} M V_{cm}^2}$$

עבור מערכת של שני חלקיקים נוכל גם לעבוד עם גדלים יחסיים:

$\bar{V}_{12} = \bar{V}_1 - \bar{V}_2$

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$:מסה מצומצמת

$\bar{a}_{12} = \frac{\bar{F}_{12}}{\mu}$

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} \mu V_{12}^2 + \frac{1}{2} M V_{cm}^2}$$

VII תנועה הרמונית

אם מסיטים במרחק קטן מאד Δx גוף כלשהו מנקודת שיווי המשקל שלו, כלומר מהנקודה בה האנרגיה הפוטנציאלית של הגוף מינימלית, אזי הגוף יתחיל לבצע תנודות קטנות מסביב לנקודת המינימום עם כח מחזיר מהצורה $-kx$:

$$\boxed{F(x) = -\frac{dU}{dx} = -k(x-x_0)}$$

בכל שאלה של תנועה הרמונית צריך להגיע למשוואה דיפרנציאלית, בשימוש שתי דרכים אפשריות: או משיקולי כוחות, או משיקולי האנרגיה הפוטנציאלית.

לכל סוג של תנועה הרמונית אפשר למצוא מד"ר אופייני, ולכן רק צריך להציב בנוסחה.

- אוסילטור פשוט

מערכת בה אין כוחות חיכוך או כוחות חיצוניים:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t}$$

A,B,φ נקבעים ע"פ תנאי ההתחלה של השאלה.

צריך לשים לב ש- ω_0^2 יכול להיות ביטוי מורכב שיתן שלושה סוגי פתרונות:

I)	$0 <$ [הביטוי בתוך ω_0]	$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$
II)	$0 >$ [הביטוי בתוך ω_0]	$x = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}$
III)	$0 =$ [הביטוי בתוך ω_0]	$x = A + Bt$

- אוסילטור מרוסן

מערכת בה פועל כח חיכוך שפרופורציוני למהירות הגוף:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\boxed{x = e^{-\gamma t}\left[A\cos\omega' t + B\sin\omega' t\right], \quad \omega' = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}$$

גם כאן צריך לשים לב שיש שלושה מצבים אפשריים ל- ω':

ריסון חלש: $\omega_0^2 > \gamma^2$: פתרון טריגונומטרי.

ריסון חזק: $\omega_0^2 < \gamma^2$: פתרון אקספוננציאלי.

ריסון קריטי: $\omega_0^2 = \gamma^2$: פתרון פולינומי.

ה"פתרונות" תקפים רק לביטוי בתוך הסוגריים המרובעים. ה- $e^{-\gamma t}$ נשאר במקומו.

- אוסילטור מאולץ

מערכת בה פועל כח חיצוני כלשהו, כאשר כל כח ניתן להציג כשילוב של קוסינוסים (למרות שזה לא קריטי):

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}\cos\omega t}$$

מפרקים את המד"ר לחלק הומוגני וחלק פרטי. את החלק הפרטי פותרים כמו המשוואה הנ"ל (עם הקוסינוס), מציבים עם פתרון פרטי מהצורה:

$$\boxed{x_p = \frac{F}{m}\left(\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\boxed{\cos\omega t}}$$

אם אין את הקוסינוס, רק הביטויים שעוברים בקבוע ופותרים בהתאם.

אור גבע ©

- אוסילטור מרוסן + מאולץ

המצב הכי כללי - גם כוחות חיכוך וגם כוחות חיצוניים:

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}\cos(\omega t + \varphi)}$$

גם פה מוצאים קודם חלק ההומוגני (שמתבטל עם הזמן לעומת הפתרון הפרטי).

הפתרון הפרטי הכללי ביותר הוא:

$$\boxed{x_p = \rho F\cos(\omega t + \varphi + \theta)}$$

$$\boxed{\rho = \frac{1}{m^2[(\omega^2-\omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2]} \quad , \quad \tan\theta = -\frac{\gamma\omega}{2(\omega_0^2-\omega^2)}}$$

φ היא הפרש הפאזה של הכח, θ היא הפרש הפאזה בין התנודות x לבין הכח F.

פרטים נוספים על אוסילטור זה: Richard Feynman \ Lectures on Phys., vol. 1, pp. 23-3.

~~- אוסילטור מאולץ - תוספות (ביבליוגרפיה)~~

~~הפתרון ההומוגני עבר על הפתרון הכללי~~

- תהודה

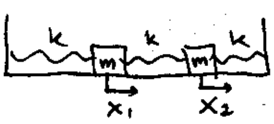
עבור אוסילטורים מאולצים ניתן להגיע למצב בו $\omega=\omega_0$. לתדר זה קוראים תדר תהודה.

בתדר זה האמפליטודה של המערכת תגדל מאוד מהר (תשאף לאינסוף) והמערכת תתפרק.

צריך לשים לב: $\omega=\omega_0$ הוא תמיד תדר התהודה, אבל הוא לא חייב להיות התדר בו האמפליטודה מקסימלית.

- אוסילטורים מצומדים

עבור מערכות של שני אוסילטורים (שני גופים מחוברים בקפיצים, למשל):



אפשר למצוא את משוואות התנועה של המסות בדרך הבאה:

1) משוואות כוחות עבור שני הגופים.

2) חיבור המשוואות וחיסור המשוואות $\Leftarrow$ שתי משוואות חדשות.

3) הגדרת שני משתנים חדשים (לא x_1,x_2 מצומדים): $X \equiv x_1+x_2 \; ; \; \chi = x_1-x_2$

4) פתרון משוואות התנועה עבור המשתנים החדשים:

$$X = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$\chi = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

5) חזרה למשתנים המקוריים: $x_1 = \frac{1}{2}(X+\chi) \; ; \; x_2 = \frac{1}{2}(X-\chi)$

שים לב: למערכת כזו שני אופני תנודה ω_1,ω_2, מהם אפשר להרכיב את כל התנודות האפשריות של המערכת.

אור גפור ©

VIII תנועה סיבובית

- מונחים בסיסיים

ניתן להקביל תנועה סיבובית לתנועה קווית, כאשר משתמשים במונחים הבאים:

$L \equiv$ תנע זוויתי (angular momentum) : P

$\tau \equiv$ מומנט כוח (torque) : F

$\theta \equiv$ זווית : X

$\omega = \dot{\theta} \equiv$ מהירות זוויתית : $V = \dot{x}$

$\alpha = \ddot{\theta} \equiv$ תאוצה זוויתית : $a = \ddot{x}$

$I \equiv$ מומנט אינרציה/התמד (inertial moment) : m

- מומנט אינרציה/התמד

מומנט ההתמד מוגדר כסכום המסות כפול מרחקן בריבוע מציר מסוים:

$$\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2}$$

ועבור גוף רציף:

$$\boxed{I = \int r^2 dm}$$

- משפט שטיינר: מומנט ההתמד של גוף הסובב סביב ציר שמקביל לציר העובר דרך מרכז-המסה של הגוף, במרחק a ממנו, נתון ע"י:

$$\boxed{I = I_{cm} + Ma^2}$$

- מומנטי אינרציה, כמו מסות, אפשר לחבר ולחסר בצורה חופשית בהתאם למבנה הגוף.

- תנע זוויתי

תנע זוויתי, וכן מומנטי כוח, תמיד מוגדרים יחסית לנקודה כלשהי שנקבעת מראש.

תנע זוויתי הוא וקטור שתמיד יהיה ניצב למישור התנועה:

$$\boxed{\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = m\bar{r} \times \bar{v}}$$

כאשר הגוף מסתובב סביב אחד הצירים הראשיים שלו (צירים שעוברים דרך מרכז-המסה)

אפשר יהיה לתאר את $\bar{L}$ כ: {כאשר $\bar{L}$ ו-$\bar{\omega}$ באותו כיוון}

$$\boxed{\bar{L} = I\bar{\omega}}$$

זהו מקרה פרטי של תנועה סביב כל שלושת הצירים:

$$\boxed{\bar{L} = \bar{\bar{I}}\bar{\omega}}$$

נשים לב ש I הוא בעצם מטריצה.

* צירים

צירים ראשיים: כל ציר שעובר דרך מרכז-המסה של הגוף.

ציר סימטריה: בגוף סימטרי (כדור, קובייה וכו') הצירים הראשיים נקראים צירי סימטריה.

מומנט כוח

כמו שבתנועה קווית הכוח F הוא הנגזרת של התנע P, כך גם בתנועה סיבובית: $\bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt}$

ושוב, כמו בתנועה קווית, מומנט הכוח

$$\boxed{\bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt} = d(\bar{r}\times\bar{p}) = \bar{r}\times\bar{F}^{ext}}$$

מושפע רק מכוחות חיצוניים:

השינוי בתנע זוויתי, יחסית ל-O, שווה לסכום המומנטים של הכוחות החיצוניים, יחסית ל-O.

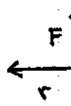
בשביל לשנות תנע זוויתי צריך להפעיל מומנט כלשהו. כדי להפעיל מומנט צריך להפעיל כוח חיצוני.

חישוב תנע זוויתי ומומנטי כוח

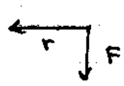
כיוון שמדובר ב-cross products צריך לשים לב לכיוון הוקטורים. בכל פעם, כשמגדירים את הצירים, צריך גם להגדיר שלשה ימנית לפי כיוון הסיבוב. השיטה הכי פשוטה היא להגדיר את ω תמיד כך: ω וכל אצבעות עם שלשה ימנית סטנדרטית $\hat{x},\hat{y},\hat{z}$.

עכשיו צריך לשים לב לאיזה כיוון הכח רוצה לסובב את הגוף:

'מסובבים' את $\bar{r}$ לכיוון $\bar{F}$ ובודקים לאיזה כיוון מסתובב.



$\bar{r}\times\bar{F} \Rightarrow +\bar{\omega} \Rightarrow \mp\tau$



$\bar{r}\times\bar{F} \Rightarrow -\bar{\omega} \Rightarrow \pm\tau$

חוקי שימור

כמו במקרה של תנע קווי, גם תנע זוויתי צריך להישמר. כאשר הוא לא נשמר, יצור אז תנע זוויתי במערכת כדי לאזן את המצב. ולכן יוצרו מומנטים.

כל עוד התנע הזוויתי נשמר, סכום המומנטים במערכת שווה לאפס:

$$\boxed{\begin{aligned}&\bar{L} = const\\ &\Rightarrow \bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt} = 0\end{aligned}}$$

לכן, כדי שגוף יהיה בשיווי משקל: 1) סכום הכוחות שווה לאפס.

2) סכום המומנטים שווה לאפס.

אנרגיה קינטית סיבובית

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_i (m_i r_i^2)\,\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}I\omega^2}$$

וזה הסיבוב כולו סביב אחד מצירי הסיבוב הראשיים:

$$\bar{L} = I\bar{\omega} \Rightarrow \boxed{E_k = \frac{L^2}{2I}}$$

- ## תנועה סיבובית ביחס למרכז-המסה

כמו בתנועה קווית, גם בתנועה סיבובית אפשר לפרק כל גודל של התנועה (תנע, מהירות, אנרגיה וכו') לתנועה של מרכז-המסה) + (תנועת כל חלקי המערכת יחסית למרכז-המסה):

תנע זוויתי:

$$\boxed{\bar{L} = \sum_i \bar{r}_i' \times \bar{p}_i' + \bar{r}_{cm} \times M\bar{V}_{cm} = \bar{L}_{cm} + \bar{L}_{cm}^{(o)}}$$

התנע הזוויתי של כל החלקיקים יחסית למ"מ

התנע הזוויתי של מ"מ יחסית לנקודה O

מומנט כוח:

$$\boxed{\bar{\tau} = \sum_i \bar{r}_i' \times \bar{F}_i + \bar{r}_{cm} \times \bar{F}^{ext} = \bar{\tau}_{cm} + \bar{\tau}_{cm}^{(o)}}$$

מומנט התמד:

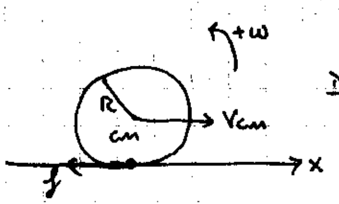
$$\boxed{I = I_{cm} + Ma^2}$$

אנרגיה קינטית:

$$\boxed{E_K = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2}$$

IX תנועת גלגול

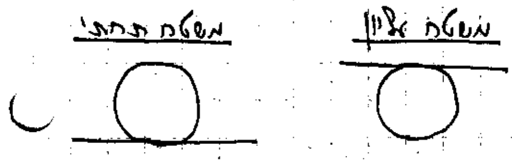
- ### גלגול ללא החלקה



בגלגול ללא החלקה לגוף יש נקודה P שבכל רגע נתון נמצאת במנוחה יחסית למשטח: $\boxed{V_p=0}$. בנקודה P פועל כח חיכוך סטטי שיוצר מומנט על מרכז המסה: $\boxed{\tau = -fR = I\dot{\omega}}$

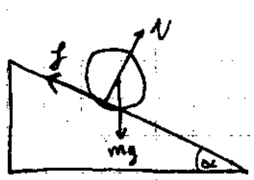
כיוון שכל נקודה במעגל נעה קדימה במהירות V, כדי שהנק' P תהיה במנוחה, בהכרח שהיא תנוע אחורה במהירות V- (וכך תאפס את מהירותה).

צריך לשים לב באיזה משטח מדובר:



$\boxed{V = -\omega R}$ $\boxed{V = \omega R}$

- ### גלגול ללא החלקה בשיפוע



גם כאן כח החיכוך הוא הכח היחיד שיוצר מומנט, ולכן:

$$\tau = fR = I\alpha$$

מהירות מרכז המסה, בגלגול, מוגדרת כ: $V_{cm} = \omega R \Rightarrow a = \alpha R$

מכאן אפשר להגיע לנוסחה כללית עבור כח החיכוך: $\boxed{f = \frac{I_{cm}a}{R^2}}$

עכשיו אפשר להציב את f במשוואת הכוחות על ציר x: $ma = mg\sin\alpha - f$

ולמצוא את התאוצה a. בגלל הגלגול $a < g\sin\alpha$ שהיינו מקבלים במצב רגיל.

עכשיו אפשר להציב את a חזרה ל-f ולקבל שכח החיכוך הסטטי תלוי בזווית α.

נשים לב שב- $\alpha = 0$ (מישור) כח החיכוך יתבטל והגוף ימשיך להתגלגל במהירות קבועה.

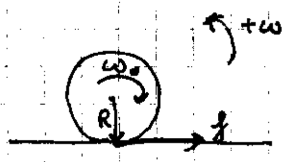
כאמור, כאשר $\alpha=0$ מקבלים השמרה גם של התנועה הקווית וגם של התנועה הסיבובית:

$$\alpha=0 \Rightarrow a(\alpha)=0 \Rightarrow V=const$$

$$\Rightarrow f(\alpha)=0 \Rightarrow \tau=0 \Rightarrow L=const \Rightarrow \omega=const$$

ולכן גם המהירות הקווית וגם המהירות הסיבובית יהיו קבועות והגוף ימשיך להתגלגל לעד.

גלגול עם החלקה



מסובבים גוף ומניחים אותו על משטח. ברגע הראשון לנקודת המגע אין מהירות אופקית. אבל הגוף מסתובב ולכן "רוצה" לנוע יחסית למשטח. לכן יופיע כח חיכוך קינטי שיתנגד לתנועה המקומית ובעצם יתחיל להזיז את הגוף בכיוון האופקי. אותו כח חיכוך גם יצור מומנט שיקטין את המהירות הסיבובית, עד שנגיע למצב בו: $V_{cm}=\omega R$

עכשיו עברנו, בעצם, לגלגול ללא החלקה. נק' המגע תשאר סטטית ולכן כח החיכוך הקינטי ייעלם. אם מדובר במישור גם לא יופיע חיכוך סטטי, והגוף ימשיך להתגלגל.

אז מכאן, נעבור לגלגול ללא החלקה בשיפוע.

$$\left.\begin{aligned} f &= \mu_k N = \mu_k mg \\ \tau &= fR = I\alpha = I\frac{\omega_0-\omega}{t} \\ f &= ma = m\frac{V-V_0}{t} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{V=\frac{I(\omega_0-\omega)}{mR}} \quad \boxed{\omega=\frac{I}{mR^2+I}\omega_0=\frac{I_{cm}}{I_p}\omega_0}$$

נספחים

טבלת מומנטי התמד

כדור מלא: $I=\frac{2}{5}MR^2$

גליל מלא: $I=\frac{1}{2}MR^2$

גליל חלול: $I=\frac{1}{2}M(R_1^2+R_2^2)$

מוט: $I=\frac{1}{12}ML^2$