8/12/03

סיכום חדו"א בשבוע 7

I. קבוצות מספרים

$\mathbb{N}$: קבוצת המספרים הטבעיים: $\{1,2,3,\dots\}$ משמש בעיקר לאינדקסים.

$\mathbb{Z}$: " " השלמים: $\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$.

$\mathbb{Q}$: " " הרציונליים (שניתן להציג כשבר): $\mathbb{Q}:=\{\frac{p}{q} : p\in \mathbb{Z}, q\in \mathbb{N}\}$.

למספרים רציונליים יש שלוש עשרונית שמתנהגת באחת משתי צורות אפשריות:

א) בה"ע מחזורית וחוזרת על עצמה.

ב) מתאפסת. אינסוף אפסים $= \bar{0}$.

$\mathbb{R}$: קבוצת המספרים הממשיים (כוללת מספרים לא רציונליים כמו $\sqrt{2}$ ו-π).

II. אינדוקציה

I) הוכח הטענה נכונה עבור המספר 1?

II) מניחים שהטענה נכונה עבור $k=n$ ועל פי הנחה זו מוכיחים שהיא נכונה גם עבור $k=n+1$.

III. חסמים

חסם מלעיל - כל איברי הקבוצה קטנים ממספר מסוים, שלא חייב להיות חלק מהקבוצה. אם הוא החסם הכי קטן האפשרי ואינו חלק מהקבוצה = sup. אם כן חלק מהקבוצה = max. $\exists(M)\forall(x\in K)[x\le M]$

חסם מלרע - ההיפך מהחסם העליון. ובהתאם inf או min. $\exists(m)\forall(x\in K)[x\ge m]$.

חסומה - קבוצה נקראת חסומה אם יש לה חסם מלעיל וגם מלרע:

$\boxed{\exists(M)\forall(x\in K)[|x|\le M]}$ או $[-M\le x\le M]$

IV. ערך מוחלט

אי-שוויון המשולש:

* $\boxed{|x\pm y|\le|x|+|y|}$

$\Rightarrow |x-y|\ge|x|-|y| \quad , \quad |x+y|\ge|x|-|y|$

$\Rightarrow |x-y|\ge\big||x|-|y|\big|$

V חסמים בקבוצות $\mathbb{N}$ ו־$\mathbb{R}$

1) $\mathbb{N}$ לא חסומה מלמעלה: נ"ש: נניח: $\perp$ $S=\sup\mathbb{N}$

$\Rightarrow S-1 \neq$ חסם מלעיל של $\mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists(n_0\in\mathbb{N})[n_0>S-1] \Rightarrow n_0+1>S \Rightarrow$ קיים מספר טבעי שגדול יותר מהסופרמום, בסתירה, ולכן $\mathbb{N}$ אינסופית. אין לה איבר מקסימלי!

$* \boxed{\forall(x_0\in\mathbb{N})\exists(x_1\in\mathbb{N})[x_1\geq x_0]}$

2) מכאן נובע: א $\forall(a,b\in\mathbb{R}: a,b>0)\exists(n\in\mathbb{N})[na>b]$

ומכאן: ב $\forall(\varepsilon>0)\exists(n\in\mathbb{N})[0<\frac{1}{n}<\varepsilon]$

ג $\forall(c\in\mathbb{R})\exists(m\in\mathbb{Z})[m\leq c<m+1]$ הערך השלם $m=[c]$

ד בין כל שני מספרים ממשיים יש מספר רציונלי.

ה אם מחלקים את $\mathbb{R}$ לשתי קבוצות, אז נקודת החיתוך שלהן היא ה־inf של אחת וה־sup של השנייה.

VI

פונקציה - כלל שמתאים לכל $x\in A$ איבר יחיד ומסוים $y\in B$, $y=f(x)$.

A - תחום הגדרה / Domain של הפונקציה.

B - טווח הפונקציה. הטווח בד"כ כלול בתוך תחום ההגדרה.

x - משתנה בלתי תלוי / מקור של y.

y - משתנה תלוי / תמונה של x.

VII

סדרות - $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ - סדרת מספרים ממשיים - לכל מספר (אינדקס) טבעי מתאימים מספר ממשי.

סדרה הרמונית - סדרת שברים, $\frac{1}{n}$.

* הרמונית מתחלפת - קפיצת סימנים, $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

VIII

מונוטוניות - כלומר, מנקודה מסוימת הסדרה עולה/יורדת באופן קבוע.

מונוטונית עולה ממש $\exists(n_0\in\mathbb{N})\forall(n\geq n_0)[a_{n+1}>a_n]$

מונוטונית עולה $\exists(n_0\in\mathbb{N})\forall(n\geq n_0)[a_{n+1}\geq a_n]$

מונוטונית יורדת ממש $\exists(n_0\in\mathbb{N})\forall(n\geq n_0)[a_{n+1}<a_n]$

מונוטונית יורדת $\exists(n_0\in\mathbb{N})\forall(n\geq n_0)[a_{n+1}\leq a_n]$

בדיקת מונוטוניות: (א) בעזרת חיסור   יורדת $a_{n+1}-a_n<0$ / עולה $a_{n+1}-a_n>0$

(ב) בעזרת חילוק   יורדת $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ / עולה $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$

חילוק טוב אם יש חזקות באיבר ($\frac{n^2}{2^n}$) או עצרת ($n!$).

אורסטור ©

8/12/03

IV גבול של סדרה

* $\boxed{\forall(\varepsilon>0)\exists(n_0\in\mathbb{N})\forall(n\geq n_0)[|a_n-L|<\varepsilon]}$

$L-\varepsilon \quad L \quad L+\varepsilon$

L הוא הגבול של סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אם בסביבה של L נמצאים כל איברי הסדרה, פרט
מספר סופי של איברים. שלמקס מספר (n_0) כל האיברים בסביבת L.
רק האיברים $a_1,\dots,a_{n_0-1}$ יכולים להיות מחוץ לסביבה.

משפטי גבולות

1. אם לסדרה יש גבול, אז הוא יחיד.
2. * אם סדרה מתכנסת, אז היא חסומה.
3. אם $a_n=c$ לכל n, אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$. הוכחה: $|a_n-c|=0<\varepsilon$
4. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ ו: $a<L<b$, אז: $\exists(n_0\in\mathbb{N})\forall(n\geq n_0)[a<a_n<b]$

⇐ מסקנה: אם $L\neq 0$, אז: $\boxed{\exists(n_0\in\mathbb{N})\forall(n\geq n_0)[|a_n|>\frac{|L|}{n}]}$, $n\in\mathbb{N}$

5. יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$. אז:

I. לכל קבוע c, $\{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, אז: $\lim\limits_{n\to\infty}ca_n=c\lim\limits_{n\to\infty}a_n=cA$

II. $\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, אז: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A+B$

III. $\{a_nb_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, אז: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\lim\limits_{n\to\infty}b_n=AB$

IV. $\{\frac{a_n}{b_n}\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, אם $B\neq 0$, אז: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n})=\frac{\lim a_n}{\lim b_n}=\frac{A}{B}$

6. I. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0$, $\alpha>0$

II. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

III. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1$, $c\in\mathbb{R}$

IV. * $\lim\limits_{n\to\infty}q^nn^c=0$, $c\in\mathbb{R}$, $|q|<1$

7. * אם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$, אז גם $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$.

8. $\lim a_n=\lim\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}=\lim\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}}$

9. אי-שוויון הממוצעים:
$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$$

י. $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, $a_n \ge b$. אזי: $\boxed{L \ge b}$

יא. **משפט הסנדוויץ'**: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ שלוש סדרות מתכנסות.

תנאים: א) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$.

ב) $a_n \le b_n \le c_n$

אזי: $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

יב. <u>התכנסות במובן הרחב</u>: $\forall(M\in\mathbb{R})\exists(n_0\in\mathbb{N})\forall(n\ge n_0)[a_n>M] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$\forall(N\in\mathbb{R})\exists(n_0\in\mathbb{N})\forall(n\ge n_0)[a_n<N] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב אם היא מתכנסת לגבול סופי או אם היא מתכנסת לאינסוף או ל- $-\infty$. אם היא לא מתכנסת לאף מספר אחד, או לאף גבול, אז היא <u>מתבדרת</u>.

יג. אם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, אזי $\lim \frac{1}{|a_n|} = \infty$.

אם $a_n > 0$, אזי: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$

אם $a_n < 0$, אזי: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$

יד. **לסדרה <u>חסומה</u> ו<u>מונוטונית</u> יש גבול**

- סדרה מונוטונית עולה וחסומה ← sup .
- " " יורדת " " ← inf .

טו. כל סדרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב.

- סדרה עולה ולא חסומה ← $+\infty$.
- " יורדת " " ← $-\infty$.

טז. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית יורדת. מתקיים:

1) $a_n < b_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

2) $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

אז: שתי הסדרות מתכנסות לאותו גבול.

יז. <u>למה של קנטור</u>: תהי $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קטעים, כך ש:

1) $[a_{n+1},b_{n+1}] \subseteq [a_n,b_n]$ לכל n .

2) $\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

אזי: קיימת נקודה אחת בלבד, c , כך ש: $c\in[a_n,b_n]$ לכל n .

הערה: המשפט לא נכון עבור קטעים פתוחים.

8/12/03

י"ח. משפט e:

1) $e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

2) $\frac{1}{e}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$

$\boxed{X}$ **תתי-סדרות** - בהנתן סדרה ואינדקסים עולים יוצרים סדרה חדשה, שבעצם חלק מהסדרה הקודמת שלנו. תת-סדרה חייבת לשמור על אותו סדר כמו הסדרה המקורית.

*א. אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת (גם במובן הרחב), אזי כל תת-סדרה שלה מתכנסת לאותו גבול.
$\Leftarrow$ אם לסדרה קיימות שתי תתי-סדרות שמתכנסות לגבולות שונים, היא מתבדרת.

ב. 1) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{a_n})^{a_n}=e$
2) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{a_n})^{a_n}=\frac{1}{e}$
הכללות של משפט e. התנאים: אוטומטית לכל $a_n\subset\mathbb{N}$ וגם מצביעים הוכחה מורכבת למקרים של $a_n\subset\mathbb{R}$. הטענה נכונה צריך רק ש-a_n ישאף לאינסוף.

*ג. סדרה מונוטונית מתכנסת אם ורק אם יש לה לפחות תת-סדרה אחת שמתכנסת.

ד. לכל סדרה מתכנסת יש תת-סדרה מונוטונית.

ה. **משפט B-W**: לכל סדרה חסומה קיימת תת-סדרה שמתכנסת לגבול סופי.
או: לכל סדרה חסומה יש לפחות גבול חלקי אחד.

ו. לכל סדרה יש תת-סדרה שמתכנסת במובן הרחב.

ז. סדרה מתכנסת במובן הרחב $\Longleftrightarrow$ יש לה גבול חלקי אחד.

ח. גבול חלקי עליון - $\overline{\lim}\, a_n=\limsup a_n$
" " תחתון - $\underline{\lim}\, a_n=\liminf a_n$
- אם סדרה לא חסומה מלעיל, אזי: $\overline{\lim}\, a_n=+\infty$
- " " " " מלרע, אזי: $\underline{\lim}\, a_n=-\infty$

ט. סדרה מתכנסת $\Longleftrightarrow$ $\overline{\lim}\, a_n=\underline{\lim}\, a_n$.

*י. **גבול מיוחד לאפס בסדרות**: מכפלה של סדרה שואפת לאפס בסדרה חסומה שווה לאפס.
$|a_n|\le M$, $\lim_{n\to\infty}x_n=0$, $\lim_{n\to\infty}x_n a_n=0$

י. קריטריון Cauchy

סדרה מתכנסת לגבול סופי ⟺ $\boxed{\forall(\varepsilon>0)\exists(n_0\in\mathbb{N})\forall(m,n\ge n_0)[|a_m-a_n|<\varepsilon]}$

$\boxed{\forall(\varepsilon>0)\exists(n_0\in\mathbb{N})\forall(n\ge n_0)\forall(p\in\mathbb{N})[|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon]}$

והסדרה מתבדרת אם התנאים הפוכים.

$a_n=\frac{1}{n}$ סדרה מתבדרת

$a_n=\frac{1}{n^2}$ סדרה מתכנסת

$\boxed{XI}$ טורים מספריים

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\dots$$

מגדירים סדרה של סכומים חלקיים: $S_1=a_1,\ S_2=a_1+a_2,\dots,S_n=a_1+a_2+\dots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

- אם $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול סופי אז הטור מתכנס ושווה לגבול. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n$
- אם $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לאינסוף או לא קיים אז הטור מתבדר.

א. קריטריון Cauchy לטורים

הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס ⟺ $\forall(\varepsilon>0)\exists(n_0\in\mathbb{N})\forall(n\ge n_0)\forall(p\in\mathbb{N})[|a_1+a_2+\dots+a_{n+p}|=|\sum_{k=1}^{n+p}a_k|<\varepsilon]$

כלומר, הטור מתכנס אם סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת לפי קריטריון Cauchy לסדרות.

* ב. תנאי הכרחי להתכנסות טור חיובי: $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

זה תנאי הכרחי, אבל לא מספיק. כלומר - אם התנאי לא מתקיים, אין טעם לבדוק הלאה. אם הוא כן מתקיים, צריך להמשיך ולבדוק.

ג. שארית הטור: הטור $\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$ נקרא n שארית הטור / זנב הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$.

- אם טור מתכנס, אז סדרת הזנבות (r_n) מתכנסת ושואפת לאפס.

ד. הורדת מספר סופי של איברים, או הוספה של מספר סופי לטור, לא משפיעה על התכנסותו או התבדרותו.

ה. אם $c\neq0$ אזי הטורים: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n$ מתכנסים/מתבדרים ביחד.
אם הם מתכנסים, אז: $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

ו. אם הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנסים, אזי: הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ מתכנס.
ואז: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

אור גבור ©

$\boxed{6}$ ז. טור חיובי ⟸ S_n סדרה מונוטונית עולה. חסומה ⟸ גבול סופי ⟸ טור מתכנס.
לא חסומה ⟸ גבול ∞ ⟸ טור מתבדר.

8|12|03

ח. מבחני השוואה

① מבחן השוואה ראשון: קיימים שני טורים: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (A), $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ (B), $a_k \le b_k$, $a_k, b_k \ge 0$

א) (B) מתכנס ⇐ (A) מתכנס.

ב) (A) מתבדר ⇐ (B) מתבדר.

הערה: נכון גם עבור התנאי $a_n \le c b_n$.

② מבחן השוואה שני: אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L$, ואז:

א) $0 < L < \infty$, אזי: טורים (A) ו-(B) מתכנסים/מתבדרים ביחד.

ב) $L=0$, אזי: מהתכנסות של (B) נובעת ההתכנסות של (A).

ג) $L=\infty$, אזי: מהתכנסות של (A) נובעת ההתכנסות של (B).

③ מבחן השוואה שלישי: אם קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ ($a_n, b_n \ne 0$) אז:

א) אם (B) מתכנס, אז (A) מתכנס.

ב) אם (A) מתבדר, אז (B) מתבדר.

④ משפט/מבחן d'Alembert: אם $\exists (n_0 \in \mathbb{N}) \forall (n \ge n_0) [\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1]$ אז הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ואם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$, אז הטור מתבדר.

הערה: המשפט לא נכון אם מחליפים את התנאי $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1$ בתנאי $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

⑤ משפט d'Alembert בגבול: אם קיים גבול $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, אזי:

א) אם $L<1$, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ב) אם $L>1$, הטור מתבדר.

ג) אם $L=1$, צ"ן פתוח.

⑥ מבחן Cauchy: אם החל ממקום מסוים איברי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מקיימים $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$

אז הטור מתכנס. ואם $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, אז הטור מתבדר.

כמו כן, אם $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, אז הטור מתכנס.

אם $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, אז הטור מתבדר.

אם הגבול $=1$, צ"ן פתוח.

XII טורים כלליים

א. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ מתכנס, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ מתכנס בהחלט.

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ מתבדר, אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ מתכנס, אומרים שהוא מתכנס בתנאי.

- טור נקרא מחליף סימן אם כל האיברים שלו מקבלים סימן לסירוגין: $u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, $a_n>0$.

ב. משפט לייבניץ: אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת, ו- $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, אז:

א) הטור $u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס.

ב) הסכום S מקיים: $0\le S\le a_1$.

ג) השארית מקיימת: $|r_n|\le a_{n+1}$.

XIII פונקציות

1) הגדרת הפונקציה לפי Heine: אם לכל סדרה $\{x_n\}$ שבתחום $x_n \ne a$ ו- $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ אז $\lim_{n\to a}f(x_n)=L$ עבור פונקציה שמוגדרת בסביבה של a, פרט ל-a עצמה.

ההגדרה של Heine טובה בעיקר לשלילת הגבול - כי אז בשביל צריך להביא סדרה שמקיימת $x_n\to a$ אבל $\lim_{x\to a}f(x_n)\ne L$. בפועל מביאים שתי סדרות ומראים שמקבלים גבולות שונים.

שיטה נוספת היא לקחת $x_n\to a$, ולהראות ש- $f(x_n)$ אין גבול.

2) הגדרת הגבול לפי Cauchy: $\boxed{\forall(\varepsilon>0)\exists(\delta>0)\forall(x: 0<|x-a|<\delta)[|f(x)-L|<\varepsilon]}$

בעצם רואים שיש תלות בין ε לבין δ. לכל ε אנחנו יכולים לבחור δ שמקיימת $|x-a|<\delta$ (פרט ל-a עצמה) רק שמקיים אי-השוויון $|f(x)-L|<\varepsilon$.

לכן כשמשתמשים ב- Cauchy להוכיח קיום גבול צריך לקבל $\delta=c\varepsilon$ (c קבוע כלשהו).

3) הגדרת הגבול לפי Heine שקולה להגדרה של Cauchy.

4) משפטים על גבולות של פונקציות

$\lim_{x\to a} f(x)=A$, $\lim_{x\to a} g(x)=B$, c קבוע:

א) $\lim_{x\to a} c = c$ ב) $\lim_{x\to a} c f(x) = cA$

ג) $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$ ד) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=AB$

ה) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$, $B\neq 0$

5) משפט הסנדוויץ'

משפט הסנדוויץ' : זהו כלל הסנדוויץ' בספרות: אם $f(x)\le g(x)\le h(x)$ ו- $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} h(x)$ אז גם $\lim_{x\to a} g(x)$ שווה לאותו מספר.

6) משפטים שנובעים מהגדרת Cauchy

א) גבול כש- $x\to\infty$: $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ אם $\forall(\varepsilon>0)\exists(E\in\mathbb{R})\forall(x: x>E)[|f(x)-L|<\varepsilon]$

ב) גבול הוא ∞ : $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ אם $\forall(M>0)\exists(\delta>0)\forall(x: 0<|x-a|<\delta)[f(x)>M]$

ג) ∞ באינסוף : $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ אם $\forall(M)\exists(E)\forall(x: x>E)[f(x)>M]$

* ד) אם $\lim_{x\to a} f(x)=L$ אז קיימת סביבה מנוקבת של a שבה $f(x)$ חסומה (בלי a עצמה).

ה) $f(x)$ מוגדרת בסביבת a, פרט ל- a. נניח שקיים הגבול: $\lim_{x\to a} f(x)=L\neq 0$. אז:

I) אם $\boxed{L>0}$ אז יש סביבה מנוקבת של a, פרט ל- a, שבה $\boxed{f(x)>\frac{L}{n}}$ לכל $n<L$

II) אם $\boxed{L<0}$ אז $\boxed{f(x)<\frac{L}{n}}$ לכל $n<L$.

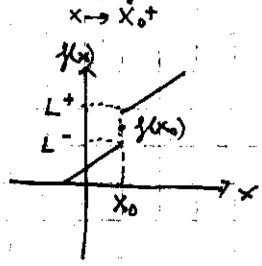
7) גבולות חד-צדדיים

גבול ימני: $\lim_{x\to a^+} f(x)=L^+ \Rightarrow \forall(\varepsilon>0)\exists(\delta>0)\forall(x: a<x<a+\delta)[|f(x)-L|<\varepsilon]$

גבול שמאלי: $\lim_{x\to a^-} f(x)=L^- \Rightarrow \forall(\varepsilon>0)\exists(\delta>0)\forall(x: a-\delta<x<a)[|f(x)-L|<\varepsilon]$

א) לפונקציה $f(x)$ קיים גבול בנקודה $x=a$ $\Longleftrightarrow$ $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)$.

ב) אם $f(x)$ מונוטונית בסביבת x_0 אז קיימים: $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L^-$ ו- $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L^+$.



I) אם $f(x)$ מונוטונית עולה : $L^-\le f(x_0)\le L^+$.

II) אם $f(x)$ " יורדת : $L^+\le f(x_0)\le L^-$.

8) גבול של הרכבה:

תהי $f(x)$ פונקציה עם $D(f)=\{x: 0<|x-a|<\delta\}$ ותמונה $Im(f)=\{y: 0<|y-L|<\beta\}$ וגבול $\lim_{x\to a} f(x)=L$

ותהי $g(x)$ פונקציה עם $D(g)=\{y: 0<|y-L|<\beta\}$ וגבול $\lim_{y\to L} g(y)=B$.

אזי: $\boxed{\lim_{x\to a} g(f(x)) = B}$

XIV רציפות של פונקציות

ניסוחים שקולים:

1) $f(x)$ מוגדרת בסביבת x_0. $f(x)$ רציפה בנקודה x_0 אם: $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$

2) $f(x)$ רציפה $\iff \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$

3) $f(x)$ רציפה $\iff \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$.

4) רציפות מימין: $f(x)$ מוגדרת בסביבה ימנית $[x_0,r)$ של x_0: $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

רציפות משמאל: $f(x)$ " " " שמאלית $(u,x_0]$ " : $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

5) רציפות לפי גבולות חד-צדדיים: $f(x)$ רציפה ב-x_0 $\iff$ $f(x)$ רציפה משמאל ומימין ל-x_0.

6) חוקי רציפות: אם $f(x)$, $g(x)$ רציפות ב-x_0, אזי גם הפונקציות הבאות רציפות ב-x_0:

א) $c f(x)$ ב) $f(x)\pm g(x)$ ג) $f(x)g(x)$ ד) $\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$

ה) $g(f(x))$ אם $f(x)$ רציפה ב-x_0 ו-$g(y)$ רציפה ב-$y_0=f(x_0)$.

7) פונקציות אלמנטריות: פונקציות אלה רציפות בכל נקודה בתחום הגדרתן:

א) $f(x)=c$ ד) $f(x)=a^x$

ב) $f(x)=x$ ה) $f(x)=\sin^{-1}x$

ג) $f(x)=\sin x$ ו) $f(x)=\log_a x$ $(0<a\neq 1)$

כל פונקציה שניתן לקבל מהפונקציות הבסיסיות הנ"ל אחרי פעולות אלגבריות או הרכבה היא גם פונקציה אלמנטרית והיא גם רציפה בתחום הגדרתה.

* צריך לשים לב שבפונקציות מסוימות תהיה רציפות רק מצד אחד של הנקודה.

למשל, $\sin^{-1}x$ מוגדרת ב-$x=1$, אבל רציפה רק משמאל, כי היא לא מוגדרת ל-$x>1$.

8) $f(x)$ רציפה ב- (a,b) אם היא רציפה בכל נקודה בתחום.
בכל אופן זה נכון לכל סוג של קטע ($[a,b]$, (a,∞), $(-\infty,b]$ וכו'), ובצריך לשים לב
לרציפות מצד אחד בקצוות הקטעים הסגורים או חצי-סגורים.

9) מיון נקודות אי-רציפות

א) נק' אי-רציפות סליקה: $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0) \text{ או ש-} f(x) \text{ לא מוגדרת ב-} x_0}$.
נק' כאלו ניתן לתקן בכך שמרחיבים את הפונקציה. מוסיפים נקודה שבה $f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$.

ב) נק' אי-רציפות ממין ראשון: $\boxed{\lim_{x\to x_0^-} f(x)\neq \lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{, הגבולות אלה סופיים}}$.

ג) נק' אי-רציפות ממין שני: לפחות אחד הגבולות החד-צדדיים ב-x_0 לא סופי, או לא קיים.

⇐ אם $f(x)$ מונוטונית בסביבת x_0 ו-$f(x)$ לא רציפה בנקודה זו, אז x_0 נק' אי-רציפות ממין ראשון.

10) $\boxed{\text{תכונות של פונקציות רציפות}}$

ערך הביניים של Cauchy — א) $f(x)$ רציפה ב-$[a,b]$, $f(a)f(b)<0$ ⇐ $\exists c\in(a,b):\ f(c)=0$

ב) $f(x)$ " " , $f(a)<y_0<f(b)$ ⇐ $\exists (a<x_0<b):\ f(x_0)=y_0$

Weierstraß I — ג) $f(x)$ " " ⇐ $f(x)$ חסומה ב-$[a,b]$.

Weierstraß II — ד) $f(x)$ " " ⇐ $f(x)$ מקבלת בקטע זה min ו-max.

מסקנה: ה) [$f(x)$ " " , סוג הפונקציה משנ"ס ⇐ $Im(f)$ קטע סגור.]

ו) תיקון: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, מונוטונית. $f(x)$ רציפה ⇔ $Im(x)$ קטע סגור.

11) רציפות של פונקציה הפוכה

א) אם פונקציה רציפה ומונוטונית בקטע $[a,b]$ אז הפונקציה הפיכה והפונקציה
ההפוכה גם רציפה ומונוטונית באותו קטע.

ב) זה נכון גם לקטעים פתוחים או אינסופיים.

12) רציפות במידה שווה

א) $f(x)$ מוגדרת בתחום D. $f(x)$ רציפה במידה שווה ב-D אם:

$$\forall(\varepsilon>0)\,\exists(\delta>0)\,\forall(x_1,x_2\in D:\ |x_1-x_2|<\delta)\,\big[|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon\big]$$

כלומר, אין קפיצות גדולות בפונקציה. תמיד נוכל לקחת קטעים שקטנים מ-δ, כך שאורך הפונקציה
[illegible] יהיה קטן מ-ε.

11 ✱ ב) אם $f(x)$ רציפה ב-$[a,b]$ אז היא רציפה בה במידה שווה. משפט קנטור

XV נגזרות

1) הגדרה: $y=f(x)$ מוגדרת בסביבת x_0. $\Delta x\neq 0$, $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

סופי $L=$ $$f'(x_0)=\lim_{x\to\Delta x}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=L$$

2) אם קיים מספר A וקיימת הפונקציה $\alpha(\Delta x)$: $\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$

אז $f(x)$ גזירה ב־ x_0 וניתן לומר: $$\boxed{\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = A(\Delta x)+\Delta x\alpha(\Delta x)}$$

זאת בעצם דרך נוספת להביע את Δy והיא טובה בעיקר בשביל הוכחות תיאורטיות של המשפטים הבאים.

3) אם פונקציה גזירה בנקודה x_0 אז היא רציפה בנקודה זו.

4) חישוב נגזרות

א) $$\frac{dz}{dx}=g'(y)\big|_{y=f(x_0)}\cdot f'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

ב) $$f(x)=u(x)^{v(x)} \Rightarrow [\ln f(x)]' = v'\times \ln u(x)+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x)=f(x)[\ln f(x)]'}$$

ג) $g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$ פונקציה הפוכה

5) $f(x)$ גזירה בנקודה x_0 $\Longleftrightarrow$ הנגזרות החד-צדדיות קיימות ושוות ב־ x_0.

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

6) $f(x)$ גזירה בקטע פתוח אם היא גזירה בכל נקודה בקטע.

בקטעים סגורים הגזירות תלויה רק בצד אחד של נקודות הקצה.

7) פונקציה מורכבת: $y=f(x)$, $x=g(t)$: $\frac{dy}{dt}=f'(x)g'(t)$

8) דיפרנציאל: ← דיפרנציאל: $dy=f'(x_0)\Delta x$

אם $f'(x_0)\neq 0$: $$\boxed{\Delta y = f'(x_0)\Delta x+\Delta x\alpha(\Delta x)\approx f'(x_0)\Delta x = dy}$$

9) קירוב לינארי: $\to f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\Delta x\alpha(\Delta x)$

קירוב לינארי: $$\boxed{f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x}$$

10) $\boxed{\text{משפטי ערך-בינ"ם}}$

* א) **Fermat**: $f(x)$ מוגדרת ב- (a,b), גזירה ב- $x_0\in(a,b)$.

אם $f(x)$ מקבלת ערך מקסימלי/מינימלי, אז: $\boxed{f'(x_0)=0}$.

* ב) **Rolle**: $f(x)$ מוגדרת ב- $[a,b]$ ומקיימת:

I) $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$.

II) $f(x)$ גזירה ב- (a,b).

III) $f(a)=f(b)$

אזי: $\boxed{\exists(c\in(a,b)) : f'(c)=0}$

* ג) **La Grange**: $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b).

אזי: $\boxed{\exists(c\in(a,b)) : f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$

* ד) **Cauchy**: $f(x)$ ו- $g(x)$ רציפות ב- $[a,b]$. וגזירות ב- (a,b). $\forall(x\in(a,b)): g'(x)\neq 0$

אזי: $\boxed{\exists(c\in(a,b)) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}}$

$\Leftarrow$ ניסוח שקול: במשפטים של La Grange ו- Cauchy ניתן להגדיר את הפונקציות בסביבה של x_0, במקום בקטע, ולומר שקיים: $\exists(\theta\in\mathbb{R}): 0<\theta<1$

כך ש: $\boxed{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x}$ משפט La Grange.

$\boxed{\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}=\frac{f'(x_0+\theta\Delta x)}{g'(x_0+\theta\Delta x)}}$ משפט Cauchy.

לזכור למה הניסוח השקול טוב. הוא נכתב מהתנאי לרציפות הפונקציה ודורש רק גזירות בסביבת x_0. אבל נקודה מוכללת.

11) כלל לופיטל: $f(x)$ ו- $g(x)$ גזירות בסביבת הנקודה $x=a$, פרט ל- a.

I) $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$ או $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty$

II) $g'(x)\neq 0$ לכל $x\neq a$ בסביבה

III) קיים הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

אזי: קיים הגבול: $\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$

אור גבאי ©

XVI טור טיילור

פיתוח סביב הנקודה a

$$\boxed{f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x) \qquad \text{נוסחת השארית של לגרנז':}\ R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

הערות

א) $n=0$: משפט LaGrange
$$f(x)=f(a)+f'(c)(x-a) \Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$$

ב) $n=1$: קירוב לינארי
$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+R_1(x)$$

ג) $a=0$: נוסחת מקלורן :
$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$
$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},\ c\in(0,x)$$

ד) אם $f(x)$ מקיימת את תנאי המשפט בסביבה $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ואם ידוע כי בסביבה זו $|f^{(n+1)}(x)|<M$ אז נוכל להעריך את גודל השגיאה של $f(x)$ מהפולינום ע"י:
$$|f(x)-P(x)|=|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right|\le\frac{M\varepsilon^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$\boxed{|R_n(x)|\le\frac{M\varepsilon^{n+1}}{(n+1)!}}$$

XVII חקירת פונקציות

1) תחומי עליה וירידה

א) $f(x)$ גזירה ב- (a,b). $f(x)$ קבועה בקטע $\iff f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$.

ב) $f(x)$ ו- $g(x)$ גזירות ב- (a,b). $\forall(x\in(a,b))[g(x)=f(x)+c] \iff \forall(x\in(a,b))[f'(x)=g'(x)]$

ג) $f(x)$ גזירה ב- (a,b):

I. $f(x)$ מונוטונית עולה $\iff \forall(x\in(a,b))[f'(x)\ge 0]$

II. $f(x)$ מונוטונית יורדת $\iff \forall(x\in(a,b))[f'(x)\le 0]$

III. $\forall(x\in(a,b))[f'(x)>0] \Rightarrow$ $f(x)$ מונוטונית עולה ממש

IV. $\forall(x\in(a,b))[f'(x)<0] \Rightarrow$ $f(x)$ מונוטונית יורדת ממש

ד) אם $f'(x)\ge 0$ לכל $x\in(a,b)$ ולא קיים $(a',b')\subset(a,b)$ כך ש: $f'(x)=0$ לכל $x\in(a',b')$
אזי: $f(x)$ מונוטונית עולה ממש בקטע (a,b).
כלומר, אם אין קטע מסוים בתוך הקטע המקורי שבו הנגזרת מתאפסת, היינו יש רק מספר סופי של נקודות בהן הנגזרת מתאפסת, אז אפשר לומר ש- $f(x)$ מונוטונית עולה ממש.

(2) נקודות מינימום ומקסימום

יש שלושה סוגים של נקודות קיצון:

א) min/max מקומי - בסביבה מסוימת של נקודה x_0 בפונקציה.

אם בסביבת x_0: $f(x)\ge f(x_0)$ - מינימום מקומי.

: $f(x)\le f(x_0)$ - מקסימום מקומי.

ב) min/max מוחלט - הערך הקיצוני של הפונקציה בתחום ההגדרה שלה.

כשבודקים נקודות מוחלטות צריך לבדוק נקודות בהן $f'(x)=0$ ואת הערכים (מוחלטים או גבולים) בקצוות הפונקציה.

ג) נקודה קריטית: אם $f'(x_0)=0$ או ש- $f(x)$ אינה גזירה ב- x_0, יש שם נקודה חשודה וצריך לבדוק האם זו נקודת min/max, או סתם אנומליה.

מבחני נגזרות

א) x_0 נקודה קריטית של $f(x)$: $f(x)$ רציפה ב- x_0 וגזירה בסביבת x_0, פרט ל- x_0. אזי:

I) אם $f'(x)$ מחליפה סימן משלילי לחיובי ב- x_0 $\Leftarrow$ x_0 מינימום מקומי של $f(x)$.

II) אם $f'(x)$ מחליפה סימן מחיובי לשלילי ב- x_0 $\Leftarrow$ x_0 מקסימום מקומי של $f(x)$.

ב) x_0 נקודה קריטית של $f(x)$. נניח ש- $f(x)$ גזירה בסביבה של x_0 ופעמיים ב- x_0. אזי:

I) אם $f''(x_0)>0$ $\Leftarrow$ x_0 מינימום מקומי של $f(x)$.

II) אם $f''(x_0)<0$ $\Leftarrow$ x_0 מקסימום מקומי של $f(x)$.

III) אם $f''(x_0)=0$ $\Leftarrow$ אמ"ן פתוח.

משפט מסכם: $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$. אזי ל- $f(x)$ יש לפחות נקודת מינימום מוחלט אחת ולפחות נקודת מקסימום מוחלט אחת בתוך הקטע.

אם x_0 נקודה כזו, היא חייבת להיות או נקודה קריטית של $f(x)$ או אחד מקצוות הקטע.

ניסוח שקול: I) $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$, S קבוצת נקודות קריטיות של $f(x)$. אזי:

$$\boxed{\max_{[a,b]} f(x) = \max\{ f(x)|_{x\in S},\ f(a),\ f(b)\}}\ ,\quad \boxed{\min_{[a,b]} f(x) = \min\{ f(x)|_{x\in S},\ f(a),\ f(b)\}}$$

II) $f(x)$ רציפה ב- (a,b), S קבוצת נקודות קריטיות של $f(x)$. אזי:

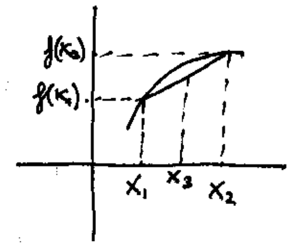
$$\boxed{\sup f(x) = \sup\{ f(x)|_{x\in S},\ \lim_{x\to b^-} f(x),\ \lim_{x\to a^+} f(x)\}}$$

$$\boxed{\inf f(x) = \inf\{ f(x)|_{x\in S},\ \lim_{x\to b^-} f(x),\ \lim_{x\to a^+} f(x)\}}$$

אנו בטוח (4)

③ קמירות ונקודות פיתול

קמירות: $f(x)$ גזירה ב- x_0. $f(x)$ קמורה כלפי מטה ב- x_0 אם קיימת סביבה של x_0 שבה גרף הפונקציה נמצא מתחת לישר המשיק ל- x_0.



$f(x)$ קמורה כלפי מעלה בתנאי הפוך.

ניסוח אפסילוני: כלפי מטה: $\forall(x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon))\ [f(x)\leq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)]$

כלפי מעלה: $[f(x)\geq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)]$

קמירות בקטע דורשת קמירות בכל נקודה באותו קטע.

ניסוח שקול: קמורה כלפי מטה אם: $f(x_3)=f(tx_1+(1-t)x_2)\geq t f(x_1)+(1-t)f(x_2)$

$0\leq t\leq 1$

בדיקת קמירות: תהי $f(x)$ גזירה פעמיים בקטע (a,b).

א) אם לכל $x\in(a,b)$ מתקיים:

$f''(x)\geq 0$ ⇐ קמורה כלפי מעלה.
$f''(x)\leq 0$ ⇐ קמורה כלפי מטה.

נקודות פיתול: נקודה שבסביבתה משתנה קימור הפונקציה.

הנקודה לא חייבת להיות בתחום ההגדרה של הפונקציה.

מציאת נקודות פיתול

א) תהי $f(x)$ גזירה פעמיים בסביבת x_0, פרט ל- x_0.

אם $f''(x)$ מחליפה סימן בנקודה x_0 ⇐ x_0 נקודת פיתול של $f(x)$.

ב) אם $f(x)$ גזירה פעמיים בסביבת x_0, ושלוש פעמים ב- x_0 עצמה,

ואם $f''(x_0)=0$ ו- $f'''(x_0)\neq 0$ ⇐ x_0 נקודת פיתול.

④ אסימפטוטות

אסימפטוטה אנכית: $x=a$ אם $f(x)$ מוגדרת בסביבה השמאלית או הימנית של a וקיים אחד הגבולות, לפחות: $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ או $\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$.

אסימפטוטה משופעת: $y=ax+b$ הנו אסימ' משופעת ב- $+\infty$ אם: $\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$.

אסימפטוטה אופקית: אסימפטוטה משופעת במקרה הפרטי: $a=0$.

מציאת אסימפטוטות: $y=ax+b$ אסימפטוטה של $f(x)$ אם קיימים הגבולות הסופיים:

$$\boxed{a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\quad,\quad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]}$$

XVIII האינטגרל הלא מסוים

1) אם $f(x)$ גזירה $\Leftarrow$ $\int f'(x)dx = f(x)+c$

2) $\int a f(x)dx = a\int f(x)dx$

3) $\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

XIX האינטגרל המסוים

חשוב: האינטגרל המסוים (רימן) תמיד מגדירים על קטעים סגורים: $[a,b]$.

1) מושגים בסיסיים: חלוקה T של הקטע $T=\{a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b\}$

$\Delta x_n=[x_{n-1},x_n]$

פרמטר החלוקה $\Delta(T)=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\dots,\Delta x_n\}$

c_i נקודה כלשהי ב- Δx_i $\quad c_i\in\Delta x_i$

תנודה: $\omega_i=\sup\limits_{x\in\Delta x_i} f(x)-\inf\limits_{x\in\Delta x_i} f(x)$

האינטגרל: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\Delta(T)\to0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \lim\limits_{\Delta(T)\to0}\sigma_T(c_1,c_2,\dots,c_n) = I$

חשוב: האינטגרל קיים רק אם הסכום σ_T אינו תלוי בבחירת החלוקה T ובבחירת הנקודות c_i, כל עוד $\Delta(T)\to0$.

2) סכומי דרבו:

סכום דרבו עליון $\bar{S}(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$, $M_i=\sup\limits_{x\in\Delta x_i} f(x)$

סכום דרבו תחתון $\underline{S}(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$, $m_i=\inf\limits_{x\in\Delta x_i} f(x)$

תכונות של סכומי דרבו:

1) $\underline{S}(T)\le\sigma_T(c_1,c_2,\dots,c_n)\le\bar{S}(T)$

2) $\bar{S}(T)-\underline{S}(T)=\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$

3) אם יוצרים חלוקה T' ע"י הוספת נקודות ל-T: $\underline{S}(T')\ge\underline{S}(T)$, $\bar{S}(T')\le\bar{S}(T)$

4) האינטגרל התחתון של $f(x)$: $\underline{I}=\sup\{\underline{S}(T): T \text{ חלוקה של } [a,b]\}$

האינטגרל העליון של $f(x)$: $\bar{I}=\inf\{\bar{S}(T): T \text{ חלוקה של } [a,b]\}$

$\underline{I}\le\bar{I}$

אלון גבור ©

3) קריטריונים לאינטגרביליות

א) $\forall(\varepsilon>0)\exists(T \text{ חלוקה})\left[\bar{S}(T)-\underline{S}(T)<\varepsilon\right]$

$\forall(\varepsilon>0)\exists(T \text{ חלוקה})\left[\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon\right]$

ב) $\lim\limits_{\Delta(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\lim\limits_{\Delta(T)\to 0}\left[\bar{S}(T)-\underline{S}(T)\right]=0$

ג) $f(x)$ חסומה ב- $[a,b]$. תהי $\varepsilon>0$ ותהי T חלוקה שרירותית.

נסמן: $\Gamma_\varepsilon=\{i:\omega_i<\varepsilon\}$ (תנודות קטנות)

$E_\varepsilon=\{i:\omega_i\geq\varepsilon\}$ (תנודות גדולות)

$f(x)$ אינטגרבילית ב- $[a,b]$ $\Longleftrightarrow$ $\forall(\varepsilon>0)\exists(T \text{ חלוקה})\left[\sum_{i\in E_\varepsilon}\Delta x_i<\varepsilon\right]$

* ד) אם $f(x)$ <u>רציפה</u> ב- $[a,b]$ $\Rightarrow$ אינטגרבילית.

ה) אם $f(x)$ רציפה <u>למקוטעין</u> (יש מספר סופי של נק' אי-רציפות וכולן ממין I) $\Rightarrow$ אינטגרבילית.

* ו) אם $f(x)$ <u>מונוטונית</u> ב- $[a,b]$ $\Rightarrow$ אינטגרבילית.

ז) כל פונקציה אלמנטרית אינטגרבילית בקטע סגור בו היא מוגדרת.

4) <u>משפטי ערך ביניים</u>

א) $$\boxed{(b-a)\inf_{[a,b]}f(x)\leq\int_a^b f(x)dx\leq(b-a)\sup_{[a,b]}f(x)}$$

ב) אם $g(x),f(x)$ אינטגרביליות ב- $[a,b]$ ו- $g(x)\geq 0$ בקטע (סימן קבוע):

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\mu\int_a^b g(x)dx},\quad \inf_{[a,b]}f(x)\leq\mu\leq\sup_{[a,b]}f(x)$$

את הפונקציות צריך לבחור לפי מהירות ההשתנות שלהן. $g(x)$ צריכה להיות איטית יותר.

ג) לפי כלל השרשרת:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)}f(t)dt=f[g(x)]\cdot g'(x)}$$

XX <u>גזירות מסדר גבוה</u>

נוסחת לייבניץ:

$$\boxed{[f(x)g(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-k)}(x)}$$

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

8/12/03

שיטות פיתרון בחדו"א

1) הוכחה בשלילה: הופכים את התנאי ומנסים להגיע לסתירה. המטרה היא להגיע לסתירה - או של אמת בסיסית ($0<1$) או של תנאי מוקדם יותר.

2) הוכחה קונסטרוקטיבית: מתוך ההגדרה השלילית בונים את המקרים השונים ומראים שהם מתנהגים כמו שהמשפט קובע.

3) הערכת שברים - המטרה להציג שברים שבהם n מצטמצם, בד"כ. $\frac{a}{b}$ או $\frac{a}{B} < \frac{A}{b}$

∈) גבולות: בהוכחות של גבולות, $f(x)=\varepsilon$ יתן גבול, $c=\varepsilon$ יתן הוכחה נכונה.

4) ערך שלם: $[a] < a < [a]+1$, $a-1 < [a] \leq a$

5) דוגמה נגדית: הסדרה $(-1)^n$ מצוינת. בד"כ $\{0,1,0,1,\dots\}$.

6) המון עבודה עם אי-שוויונים: את חשוב בגבולות. איפה שיש ערך מוחלט, משפט אי-שוויון המשולש.

7) אינדוקציה

8) הוספה/החסרה איברים: למשל, אם יש ביטוי: $|a_n+a_{n-1}||a_{n-1}+a_{n-2}|\cdots|a_2+a_1|$ אפשר להוסיף 2^n: $2^n\left[\left(\frac{|a_n+a_{n-1}|}{2}\right)\left(\frac{|a_{n-1}+a_{n-2}|}{2}\right)\cdots\left(\frac{|a_2+a_1|}{2}\right)\right]$

9) הערכות של $x\sin$ / $x\cos$: $|\cos x| \leq 1$, $|\sin x| \leq 1$

10) במקרה של גבול מסוג 1^{∞} צריך לנסות להגיע ל- $\left(1+\frac{\alpha}{h(x)}\right)^{h(x)}$ כדי לקבל e^{α}.

11) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to\alpha}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$ אם $\lim_{x\to\alpha}\alpha(x)=0$.

12) בגבולות מסוג $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$ בד"כ אפשר לשחק עם האיברים כדי לצמצם אותם ולקבל תשובה הגיונית.

13) בגבולות מספיק קירוב $x=\sin x$: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\sin x = x$

14) דוגמאות הפרכה נפוצות
הסדרה $(-1)^n$, הפונקציה $|x|$, הפונקציה $\frac{|x|}{x}$

15) טורים טלסקופיים - נהדר להוכחת התכנסות של טורים.

16) מה יותר חזק ממה? עצרת (!) מנצחת חזקה מעריכית (a^x) מנצחת חזקה (x^a).

אור סגל ©

$\boxed{*}$

17) סדרות ופונקציות מיוחדות + טורים נפוצים

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 2^k \\ 0, & n \neq 2^k \end{cases} \quad ; \; a_n = \{1,0,1,0,\dots\} \quad ; \; a_n = (-1)^n$$

$$b_n = \{0,1,0,1,\dots\}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \; , \; D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} , \; f(x) = \frac{|x|}{x} \; , \; f(x) = |x|$$

$\sum \frac{1}{2^n}$ מתכנס

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$: $0 < \alpha \leq 1$ מתבדר

$\alpha > 1$ מתכנס

18) נגזרות מסדר גבוה

$$\Rightarrow (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} n\right)$$

$$\Rightarrow (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} n\right)$$

$$\Rightarrow [f(x) \pm g(x)]^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$$

19) טורי טיילור בסיסיים

לתוך הטורים האלה אפשר להציב איזה משתנה שרוצים.

$$\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n}(x)$$

$$\Rightarrow \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+1}(x)$$